



**DULCE MANUELA**      **Tópicos da História da Trigonometria**  
**MARTINS NOGUEIRA**



**DULCE MANUELA  
MARTINS NOGUEIRA**

## **Tópicos da História da Trigonometria**

Tese apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica da Doutora Ana Breda, Professora Associada com Agregação, do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

## **o júri**

Presidente

**Prof. Doutora Andreia Oliveira Hall**  
professora associada da Universidade de Aveiro

**Prof. Doutor Jaime Maria Monteiro de Carvalho e Silva**  
professor associado da Universidade de Coimbra

**Prof. Doutora Ana Maria Reis d'Azevedo Breda**  
professora associada com agregação da Universidade de Aveiro (Orientadora)

## **Agradecimentos**

Uma dissertação não surge do nada.

Constrói-se com a influência da orientadora que questionou, desafiou e incentivou constantemente a autora. Refiro-me à professora Doutora Ana Breda que, com a exigência, rigor científico e motivação constante, acreditou que esta investigação era possível.

Não chega ao seu termo sem a colaboração de pessoas e instituições, que disponibilizaram o seu tempo e recursos para que este objetivo fosse alcançado. Penso no Comandante Semedo de Matos e no Oficial da Armada Malhão Pereira.

Ganha a sua cor com todos aqueles que marcaram aquela que o escreve, como os alunos, professores, coordenadores e diretores das escolas onde lecionou e que a fizeram crescer profissionalmente. Merecem destaque especial a Escola Portuguesa Ruy Cinatti – Centro de Ensino e Língua Portuguesa e a Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos.

Agradeço ao Agrupamento de Escolas Rio Tinto nº3, onde leciono atualmente, pela colaboração prestada na reta final deste trabalho.

A todos os que me ajudaram a concretizar este trabalho, Muito Obrigada.

## palavras-chave

história da matemática, trigonometria, tabelas de cordas, funções trigonométricas, *quibla*, GeoGebra

## Resumo

Os objetivos deste trabalho são o aprofundamento do conhecimento científico da história da Trigonometria e a criação de tarefas para alunos tendo em vista a motivação para este tópico e o desenvolvimento de competências a nível da pesquisa, investigação e demonstração, servindo-nos, para isso, de vários episódios da sua história.

Começamos pelo Egipto (*seked* da pirâmide), seguindo-se a Grécia de Hiparco e Ptolomeu, onde vemos nascer, com teoremas e demonstrações, as primeiras tabelas de cordas.

Faremos uma incursão pela Índia, onde encontramos vários matemáticos/astrónomos que, movidos pelo conhecimento dos céus, criam uma linguagem trigonométrica própria e um conjunto de técnicas engenhosas e sofisticadas que lhes permitem a obtenção de tabelas de semicordas, mais rigorosas que as gregas. Contudo, ao contrário dos gregos, os indianos não acompanham as suas técnicas de provas rigorosas.

No Império Árabe (Islão) constata-se a fusão do conhecimento grego com o indiano. Trabalham as seis funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, secante, cossecante, cotangente) no círculo unitário. Aqui, uma das forças motrizes da Trigonometria foi a religião, com a necessidade da determinação da *quibla*, a direção sagrada para Meca.

No que concerne a Portugal veremos de que forma Pedro Nunes aborda a Trigonometria na sua *Annotação* sobre a largura dos Climaxes.

Os últimos episódios da História da Trigonometria, que apresentamos nesta dissertação, envolvem a relação dos triângulos esféricos de ângulo reto com os triângulos retângulos planos e a evolução da linguagem e da simbologia associada à Trigonometria.

No último capítulo são propostas quatro tarefas, para desenvolvimento em sala de aula, com recurso às diferentes vistas proporcionadas pelo software de geometria dinâmica GeoGebra 5.0 (3D) e à folha de cálculo do Excel. Os assuntos trigonométricos aqui abordados são variados e apela-se ao raciocínio indutivo (através de conjecturas) e ao raciocínio dedutivo (através de demonstrações).

## Keywords

history of mathematics, trigonometry, table of chords, trigonometric functions, *qibla*, GeoGebra

## Abstract

This project aims at the scientific deepening of the history of Trigonometry and at the creation of tasks for students hoping to arise motivation for this topic and the development of skills regarding research, investigation and demonstration; for that purpose one will use several episodes of Trigonometry's history.

One will start by Egypt (*seked* of the pyramid), followed by the Greece of Hipparchus and Ptolemy, where, with theorems and demonstrations, the first tables of chords were born.

One will then do an incursion into India, where one finds several mathematicians/astronomers who, moved by the knowledge of the skies, create a particular trigonometric language and a set of ingenious and sophisticated techniques which allow them the obtainment of semi chord tables more accurate than the Greek ones. However, unlike the Greeks, the Indians do not provide their techniques with accurate evidence.

In the Arab Empire (Islam) one witnesses the fusion of Greek with Indian knowledge. They work with the six trigonometric functions (sine, cosine, tangent, secant, cosecant, cotangent) in the unit circle. Here one of the driving forces of Trigonometry was religion and the necessity of the determination of the *qibla*, the sacred direction to Mecca.

With respect to Portugal, one will see how Pedro Nunes approaches Trigonometry in his Anotação about the width of climates.

The last episodes of the History of Trigonometry presented in this dissertation involve the relationship between spherical triangles of right angles and the plane right triangles as well as the evolution of the language and symbology associated with Trigonometry.

In the last chapter four tasks are proposed for the classroom, using different views provided by the dynamic geometry software GeoGebra 5.0 (3D) and the Excel spreadsheet. The trigonometric issues here addressed are varied and one calls for inductive reasoning (through conjectures) and the deductive reasoning (through demonstrations).

## Índice

|  |    |
|--|----|
| INTRODUÇÃO .....   | 15 |
| Capítulo 1 – As origens da Trigonometria .....   | 19 |
| 1.1. Papiro de Rhind (século IV a V a.C.) e Plimpton 322 .....   | 19 |
| 1.2. O <i>seked</i> de uma Pirâmide.....   | 20 |
| Capítulo 2 – A Trigonometria na Grécia.....  | 23 |
| 2.1. Hiparco de Bitínia ou Niceia (190 a 120 a.C.).....  | 23 |
| 2.1.1. Cálculo de alguns ângulos .....   | 24 |
| 2.1.2. Reconstrução da tabela de cordas de Hiparco.....  | 28 |
| 2.1.3. Construção da tabela de uma tabela de cordas com as fórmulas de Hiparco usando o GeoGebra .....           | 29 |
| 2.1.4. Tabela de Hiparco: algumas considerações .....  | 30 |
| 2.2. Menelau (70-140).....   | 30 |
| 2.3. Ptolomeu (100 – 178).....   | 30 |
| 2.3.1. Construção da tabela de cordas de Ptolomeu .....  | 31 |
| 2.3.2. O Teorema de Ptolomeu .....   | 36 |
| 2.3.3. A terceira coluna da tabela de Ptolomeu: o seu significado .....  | 45 |
| 2.3.4. Verificação do Teorema que permite obter <i>crd</i> (1°).....   | 47 |
| 2.3.5. Construção da tabela de uma tabela de cordas com as fórmulas de Ptolomeu usando o GeoGebra .....          | 48 |
| 2.3.6. Comparação entre os valores de seno de Ptolomeu e os valores de seno atuais .....                         | 48 |
| 2.3.7 Regressão sinusoidal e polinomial a partir de alguns valores da tabela de Ptolomeu usando o GeoGebra ..... | 48 |
| 2.3.8 Aplicação da tabela de cordas na Astronomia .....  | 49 |
| 2.3.9. Um problema .....   | 54 |
| Capítulo 3 – Trigonometria na Índia.....   | 57 |
| 3.1. A Grécia chega à Índia .....  | 57 |
| 3.2. O início da trigonometria indiana e o <i>Āryabathīya</i> de Āryabhata (476-550).....                        | 58 |
| 3.2.1. A palavra Trigonometria na Índia.....   | 59 |
| 3.2.2. A linguagem usada .....   | 59 |
| 3.2.3. A construção da tabela de R-senos por Āryabhata.....  | 60 |
| 3.2.4. O método geométrico para calcular os R-senos .....  | 60 |
| 3.2.5. Descrição do cálculo das 24 diferenças por Āryabhata .....  | 62 |

|  |     |
|--|-----|
| 3.2.6. Cálculo das 24 diferenças com o Excel .....   | 67  |
| 3.2.7. A construção da tabela de R-senos .....   | 68  |
| 3.2.8. A construção da tabela dos R-senos utilizando o Excel .....                               | 70  |
| 3.3. Bhāskara I (600-680) e a aproximação racional do seno .....                                 | 70  |
| 3.4. Brahmagupta (598-670) e a fórmula de Newton-Sterling .....                                  | 74  |
| 3.4.1. Aplicação da fórmula de interpolação de Brahmagupta .....                                 | 75  |
| 3.4.2. A explicação da regra de Brahmagupta .....  | 76  |
| 3.5. Madhava de Sangamagramma (1340-1425) e as séries de potências para o seno e o cosseno ..... | 78  |
| 3.5.1. Uma demonstração das séries de seno e cosseno.....  | 79  |
| 3.5.2. A tabela de senos de Madhava .....  | 88  |
| 3.6. O porquê da divisão do quadrante em 24 partes .....   | 88  |
| 3.7. Aplicação dos Senos e dos Cossenos a equações planetárias.....                              | 89  |
| 3.7.1. Planetas internos e externos.....   | 89  |
| 3.7.2. Teoria dos Epíclis .....  | 90  |
| 3.7.3. O modelo dos Epíclis de Ptolomeu.....   | 91  |
| 3.7.4. O modelo planetário indiano .....   | 92  |
| 3.7.5. A correção de śīghra.....   | 94  |
| 3.7.6. A correção de manda .....   | 95  |
| 3.7.7. A correção de Manda no GeoGebra .....   | 96  |
| 3.7.8. A localização do planeta.....   | 96  |
| 3.8. A origem da palavra seno.....   | 97  |
| 3.9. A origem da função cosseno .....  | 97  |
| Capítulo 4 – Trigonometria no Império Árabe .....  | 99  |
| 4.1. Contextualização histórica .....  | 99  |
| 4.2. A trigonometria no mundo árabe .....  | 100 |
| 4.3. As seis funções trigonométricas.....  | 101 |
| 4.4. O Círculo Unitário .....  | 104 |
| 4.5. Abū'l-Wafā (940-998).....   | 104 |
| 4.6. Al-Bīrūnī (973-1055) .....  | 106 |
| 4.7. Nasīr al-Dīn Tusī (1201-1274).....  | 108 |
| 4.7.1. A Lei dos Senos.....  | 109 |
| 4.7.2. Resolução de triângulos .....   | 110 |



|   |     |
|---|-----|
| 4.8. Tabelas trigonométricas: cálculo e interpolação .....                      | 112 |
| 4.9. Al-Kāshī (1380-1429) .....   | 114 |
| 4.9.1. O método de Al-Kāshī.....  | 115 |
| 4.9.2. Al-Kāshī à luz atual .....   | 117 |
| 4.9.3. Al-Kāshī e o GeoGebra .....  | 118 |
| 4.10. Aplicações à prática religiosa: a determinação da <i>Qibla</i> .....      | 118 |
| 4.10.1. O método de Al-Battānī .....  | 119 |
| 4.10.2. O método de Habash al-Hāsib.....  | 121 |
| 4.11. Uma aplicação na geografia .....  | 125 |
| 4.12. Instrumentos astronômicos e trigonométricos .....                         | 127 |
| 4.12.1. O quadrante horário .....   | 128 |
| 4.12.2. O seno quadrante ou quadrante sinecal ( <i>Rubul mujayyab</i> ) .....   | 130 |
| 4.13. Conclusão .....   | 133 |
| Capítulo 5 – Trigonometria em Portugal.....                                     | 135 |
| 5.1. A ciência árabe chega à Europa .....                                       | 135 |
| 5.2. A Índia e Portugal .....   | 137 |
| 5.3. Pedro Nunes (1502-1578) .....  | 138 |
| 5.3.1. A evolução da Matemática medieval até Pedro Nunes.....                   | 138 |
| 5.3.2. Biografia .....  | 139 |
| 5.3.3. As fontes livrescas de Pedro Nunes .....                                 | 140 |
| 5.3.4. Bibliografia de Pedro Nunes.....   | 141 |
| 5.3.5. A Trigonometria Plana em Pedro Nunes.....                                | 144 |
| Capítulo 6 - Mais alguns episódios da História da Trigonometria.....            | 169 |
| 6.1. Rheticos (1514-1574) .....   | 169 |
| 6.2. Pitiscus (1561-1613) e a invenção da palavra trigonometria – ano 1600..... | 169 |
| 6.3. Triângulos de ângulos retos e John Napier (1550-1617) .....                | 172 |
| 6.3.1. John Napier .....  | 172 |
| 6.3.2. Ângulo esférico.....   | 173 |
| 6.3.3. Triângulos esféricos de ângulo reto e triângulos planos retângulos ..... | 173 |
| 6.3.4. As dez fórmulas de um triângulo esférico de ângulo reto .....            | 175 |
| 6.3.5. Passando aos triângulos planos .....                                     | 178 |
| 6.4. Os termos seno e cosseno e as suas abreviaturas .....                      | 178 |
| 6.5. Os termos secante e cossecante e as suas abreviaturas .....                | 179 |

|  |     |
|--|-----|
| 6.7. Os termos tangente e cotangente e as suas abreviaturas .....  | 180 |
| 6.8. A origem dos símbolos modernos para graus, minutos e segundos .....                                     | 181 |
| 6.9. A origem do termo radiano .....   | 184 |
| Capítulo 7- Atividades .....   | 185 |
| 7.1. Atividade 1: Como Ptolomeu determinou o valor de <b>crd</b> (1°)?.....                                  | 185 |
| 7.2. Atividade 2: O Seno Indiano e Bhāskara .....  | 190 |
| 7.3. Atividade 3: As funções trigonométricas árabes e o valor de <b>Sin</b> 1° de Al-Kashi .....             | 196 |
| 7.4. Atividade 4: Pedro Nunes e a <i>Anotação sobre as derradeiras palauras do Capitulo dos Climas</i> ..... | 200 |
| CONCLUSÃO .....  | 215 |
| BIBLIOGRAFIA.....  | 217 |
| Artigos eletrónicos .....  | 219 |
| Sites Web.....   | 219 |
| Livros Eletrónicos .....   | 221 |
| Video .....  | 221 |
| ANEXOS .....   | i   |
| Print screen das Hiperligações .....   | i   |
| Hiparco.ggb .....  | i   |
| Ptolomeu_Corda1.ggb .....  | i   |
| Ptolomeu_TabelaCordas.ggb .....  | ii  |
| Ptolomeu_seno.ggb .....  | ii  |
| Ptolomeu_regressao.ggb .....   | iii |
| Aryabhata_calculodiferencas.xlsx .....   | iii |
| Aryabhata_r-senos.xlsx .....   | iv  |
| Bhaskara.ggb .....   | iv  |
| Madhava.xlsx.....  | v   |
| EquacaoPlanetaria.ggb.....   | v   |
| Al-Kashi.ggb .....   | vi  |
| Demonstração da fórmula da soma de potências inteiras de Jyesthadeva.....                                    | vii |
| Demonstrações dos Elementos de Euclides.....   | x   |
| Petrus Apianus – extrato da sua tabela de senos .....  | xv  |

## Índice de Ilustrações

|  |    |
|--|----|
| Ilustração 1 - Papiro de Rhind .....                                     | 20 |
| Ilustração 2 - <i>Seked</i> de uma pirâmide, <b>I</b> .....              | 21 |
| Ilustração 3 - <i>Seked</i> de uma pirâmide, <b>II</b> .....             | 21 |
| Ilustração 4 - Hiparco de Niceia num selo grego.....                     | 23 |
| Ilustração 5 - Comprimento de uma corda subentendida por um ângulo ..... | 24 |
| Ilustração 6 - Corda de um ângulo de $90^\circ$ .....                    | 25 |
| Ilustração 7 – Fórmula da corda do ângulo suplementar .....              | 25 |
| Ilustração 8 – Fórmula da corda do ângulo metade .....                   | 26 |
| Ilustração 9 – Ptolomeu .....  | 30 |
| Ilustração 10 - Construção da corda de $36^\circ$ , <b>I</b> .....       | 31 |
| Ilustração 11 - Construção da corda de $36^\circ$ , <b>II</b> .....      | 32 |
| Ilustração 12 – Construção da corda de $72^\circ$ .....                  | 33 |
| Ilustração 13 - Construção da corda de $72^\circ$ .....                  | 33 |
| Ilustração 14 - Fórmula da corda do arco suplementar .....               | 35 |
| Ilustração 15 - Teorema de Ptolomeu, caso 1.....                         | 36 |
| Ilustração 16 – Teorema de Ptolomeu, caso 2 .....                        | 37 |
| Ilustração 17 – Fórmula da diferença de dois arcos .....                 | 37 |
| Ilustração 18 - Fórmula da corda do arco metade .....                    | 38 |
| Ilustração 19 - Fórmula da soma de dois arcos.....                       | 40 |
| Ilustração 20 - Fórmula do seno da soma .....                            | 41 |
| Ilustração 21 - Fórmula do cosseno da diferença .....                    | 42 |
| Ilustração 22 - Cálculo da corda de $1^\circ$ .....                      | 43 |
| Ilustração 23 - Extrato do Almagesto .....                               | 46 |
| Ilustração 24 - Almagesto de Ptolomeu: Tabela de Cordas .....            | 47 |
| Ilustração 25 - Eclítica.....  | 50 |

|   |     |
|---|-----|
| Ilustração 26 – Órbitas dos Planetas e dos objetos celestes iluminados,.....                                | 50  |
| Ilustração 27 - Movimento aparente do Sol observado a partir da Terra, segundo os gregos .....              | 51  |
| Ilustração 28 - Modelo Solar de Hiparco.....  | 52  |
| Ilustração 29 - Obtenção da excentricidade do Sol, Ptolomeu.....  | 53  |
| Ilustração 30 - Āryabhata .....   | 58  |
| Ilustração 31 - Linguagem indiana .....   | 59  |
| Ilustração 32 – Método geométrico para os R-senos, <i>I</i> .....   | 61  |
| Ilustração 33 - Método geométrico para os R-senos, <i>II</i> .....  | 61  |
| Ilustração 34 - Método para o cálculo das 24 diferenças .....   | 63  |
| Ilustração 35 - Bhāskara .....  | 70  |
| Ilustração 36 - Gráficos da função seno: a preto a função de Bhāskara e a vermelho a função seno atual..... | 71  |
| Ilustração 37 - Bhāskara I e a aproximação racional do seno .....   | 72  |
| Ilustração 38 - Brahmagupta.....  | 74  |
| Ilustração 39 – Demonstração das séries de seno e cosseno: interpretação geométrica, parte 1 .              | 79  |
| Ilustração 40 - Demonstração das séries de seno e cosseno: interpretação geométrica, parte 2 .              | 81  |
| Ilustração 41 - Construção do seno de 3ª ordem.....   | 84  |
| Ilustração 42 - A posição relativa dos planetas do Sistema Solar: planetas internos e externos ....         | 89  |
| Ilustração 43 - Teoria dos Epículos de Apolónio.....  | 90  |
| Ilustração 44 - Teoria dos Epículos de Ptolomeu.....  | 91  |
| Ilustração 45 - Modelo planetário indiano.....  | 93  |
| Ilustração 46 - Correção de Manda, com o planeta em duas posições diferentes.....                           | 95  |
| Ilustração 47 – Seno e Cosseno indiano.....   | 101 |
| Ilustração 48 - A Tangente no contexto das sombras .....  | 102 |
| Ilustração 49 - A Cotangente no contexto das sombras .....  | 102 |
| Ilustração 50 - Tangente e Cotangente definidas de forma geométrica .....                                   | 103 |
| Ilustração 51 - As seis funções trigonométricas.....  | 105 |

|   |     |
|---|-----|
| Ilustração 52 - Al-Bīrūnī num selo do Irão.....   | 106 |
| Ilustração 53 - Demonstração da fórmula da tangente, Al-Bīrūnī .....                                    | 107 |
| Ilustração 54 - Al-Tusī num selo iraniano pelo 700º aniversário da sua morte .....                      | 108 |
| Ilustração 55 - Lei dos Senos: no triângulo <b>ABC</b> um dos ângulos é obtuso .....                    | 109 |
| Ilustração 56 - Lei dos Senos: no triângulo <b>ABC</b> os ângulos <b>B</b> e <b>C</b> são agudos .....  | 109 |
| Ilustração 57 - Resolução de triângulos, <b>I</b> .....   | 110 |
| Ilustração 58 - Resolução de triângulos, <b>II</b> .....  | 111 |
| Ilustração 59 - Extrato da tabela de senos de Al-Battānī.....   | 113 |
| Ilustração 60 - Al-Kāshī num selo iraniano.....   | 114 |
| Ilustração 61 - Método de Al-Battani num modelo bidimensional.....                                      | 119 |
| Ilustração 62 - Quibla, método de Al-Battānī num modelo tridimensional.....                             | 119 |
| Ilustração 63 - Diagrama utilizado para determinar a quibla recorrendo a um método aproximado.<br>..... | 120 |
| Ilustração 64 - Construção de Habash, modelo bidimensional.....   | 121 |
| Ilustração 65 - Construção de Habash: figura original retirada da Carta de Al- Bīrūnī .....             | 122 |
| Ilustração 66 - Construção de Habash, modelo tridimensional .....                                       | 123 |
| Ilustração 67 - Problema da distância entre duas cidades, A e B .....                                   | 126 |
| Ilustração 68 - Quadrante horário, <b>I</b> .....   | 128 |
| Ilustração 69 - Quadrante horário, <b>II</b> .....  | 129 |
| Ilustração 70 - Seno Quadrante .....  | 130 |
| Ilustração 71 - Sistema de Coordenadas Equatoriais.....   | 131 |
| Ilustração 72 - Seno quadrante: interpretação geométrica.....   | 132 |
| Ilustração 73 - Império árabe por volta de 750.....   | 136 |
| Ilustração 74 - Pedro Nunes .....   | 139 |
| Ilustração 75 - Latitude Astronómica .....  | 146 |
| Ilustração 76 - Latitude Geográfica .....   | 146 |
| Ilustração 77 - Relação entre a latitude astronómica e geográfica .....                                 | 147 |

|  |     |
|--|-----|
| Ilustração 78 - Declinação do Sol .....  | 147 |
| Ilustração 79 - Modelo de Pedro Nunes: paralelos e horizontes .....  | 148 |
| Ilustração 80 - Modelo de Pedro Nunes: círculos e horizontes .....   | 149 |
| Ilustração 81 - Os sete Climas .....   | 150 |
| Ilustração 82 - Tabela de Climas, Pedro Nunes .....  | 150 |
| Ilustração 83 - Demonstração de um resultado auxiliar, figura de apoio de Pedro Nunes .....  | 152 |
| Ilustração 84 - Demonstração da largura dos Climas, modelo tridimensional .....  | 154 |
| Ilustração 85 - Demonstração da largura dos climas, modelo bidimensional de Pedro Nunes ....   | 154 |
| Ilustração 86 - Exemplo da aplicação do resultado de Pedro Nunes .....   | 156 |
| Ilustração 87 – Processo gráfico para determinar a duração do dia em qualquer momento do ano – esquema tridimensional.....                                 | 158 |
| Ilustração 88 - Processo gráfico para determinar a duração do dia em qualquer momento do ano, Pedro Nunes.....   | 159 |
| Ilustração 89 - O <i>estromẽto</i> da <i>Annotação</i> , Pedro Nunes.....  | 160 |
| Ilustração 90 - Rosa Circular (esquerda) e Agulha magnética (direita).....   | 161 |
| Ilustração 91 - Campo magnético terrestre .....  | 162 |
| Ilustração 92 - Polo Norte magnético (esquerda) e Declinação Magnética (direita).....  | 162 |
| Ilustração 93 - Declinação Magnética Oeste e Leste .....   | 163 |
| Ilustração 94 - Desvio este e oeste da agulha .....  | 163 |
| Ilustração 95 - Azimute .....  | 163 |
| Ilustração 96- Malhão Pereira: Interpretação gráfica do Diagrama de Pedro Nunes para determinar a amplitude do Sol em função da latitude e declinação..... | 165 |
| Ilustração 97 - Capa da obra <i>Trigonometriae sive de Pitiscus</i> .....  | 169 |
| Ilustração 98 – Esquema original usado por Pitiscus para se referir ao seno, cosseno, tangente e secante. Neste esquema LC é a tangente ao arco BC. ....   | 170 |
| Ilustração 99 - Extratos das definições trigonométricas de Pitiscus.....   | 170 |
| Ilustração 100 - Extratos das definições trigonométricas de Pitiscus (continuação).....  | 171 |
| Ilustração 101 – Esquema para a determinação da altura da Torre, <b>BC</b> .....   | 171 |

|  |     |
|--|-----|
| Ilustração 102 - Triângulo esférico e ângulo esférico .....  | 173 |
| Ilustração 103 – Passagem de ângulos esféricos a ângulos planos .....                                  | 174 |
| Ilustração 104 - As dez fórmulas de um triângulo esférico de ângulo reto, esquema tridimensional ..... | 176 |
| Ilustração 105 - As dez fórmulas de um triângulo esférico de ângulo reto, esquema bidimensional .....  | 176 |
| Ilustração 106 - Função tangente e reta tangente.....  | 180 |

## Índice de Tabelas

|   |     |
|---|-----|
| Tabela 1 - Tabela de cordas de Hiparco .....  | 28  |
| Tabela 2 - Cálculo das 24 diferenças seguindo a fórmula de Nīlakanta.....                         | 66  |
| Tabela 3 - Construção da tabela de R-senos de Āryabhata .....                                     | 68  |
| Tabela 4 - Brahmagupta .....  | 75  |
| Tabela 5 - Método de Brahmagupta para obter o R-seno .....  | 76  |
| Tabela 6 - Tabelas trigonométricas árabes .....   | 113 |
| Tabela 7 - Abreviaturas/símbolos para grau, minuto e segundo.....                                 | 182 |
| Tabela 8 - Símbolos modernos para grau, minuto e segundo: relação com a notação de expoente ..... | 183 |

# INTRODUÇÃO

A Trigonometria constitui um tópico da Matemática atualmente lecionado a partir do 9º ano. Os alunos, que têm o privilégio de com ela contatar no Ensino Secundário, nem sempre se sentem, na sua maioria, atraídos por este assunto, o que se reflete na sua pouca compreensão. Para eles a Trigonometria não passa de uma matéria onde apenas necessitam de saber um conjunto de fórmulas e esquemas.

Contudo a Trigonometria é um tópico que se desenvolveu ao longo de vários séculos, sempre associado a aplicações. De fato, a grande motivação do desenvolvimento da Trigonometria surge de áreas como a Astronomia, a Geografia ou mesmo a Religião. Seriam necessários vários séculos até se afirmar como uma disciplina independente.

Os episódios históricos que conduziram à forma como hoje ensinamos Trigonometria são pouco conhecidos. Até que ponto o conhecimento destes episódios poderá influenciar o método de ensino deste tópico?

Estamos em crer que o aprofundamento científico deste assunto e a utilização de ferramentas computacionais, por parte dos professores, serão capazes de conquistar os espíritos mais difíceis ou de os fazer despertar para outras capacidades até aí adormecidas.

Neste estudo propomo-nos: aprofundar o conhecimento histórico do tópico Trigonometria e desenvolver tarefas para alunos tendo em vista a motivação para este assunto e o desenvolvimento de competências a nível da pesquisa, investigação e demonstração, servindo-nos para isso de vários episódios da sua história.

Nesse sentido este trabalho está dividido em duas partes.

## **PARTE 1**

Na primeira parte, constituída pelos seis primeiros capítulos, viajamos pelo Egipto, Grécia, Índia, Império Árabe, Europa e Portugal, com Pedro Nunes. Em cada um destes capítulos procura-se a linha cronológica que nos trouxe até à Trigonometria que hoje se leciona. Sendo esta linha muito extensa, optou-se por privilegiar os primeiros impulsionadores. Nestes capítulos, estão presentes vários matemáticos/astrónomos ou, simplesmente, autodidatas que foram escolhidos pela sua enorme importância no desenvolvimento da Trigonometria e/ou pelas suas ideias inovadoras estando, por vezes, muito à frente no seu tempo.

No Capítulo 1 intitulado, *As origens da Trigonometria*, são abordados os primeiros registos escritos, como, por exemplo, os constantes no Papiro de Rhind. Neste, podemos encontrar um conjunto de problemas associados à construção das pirâmides egípcias, que podem ser resolvidos usando a cotangente e que envolvem o *Seked* de uma pirâmide (a medida da inclinação da face lateral da pirâmide relativamente à base).



Iniciamos o Capítulo 2, intitulado *Trigonometria na Grécia*, com um resumo biográfico sobre Hiparco de Niceia, considerado o pai da Trigonometria. A "Trigonometria" era então baseada no estudo da relação entre um arco arbitrário e a corda correspondente. Hiparco dedica-se ao cálculo do comprimento de cordas. Neste capítulo apresentamos as construções subjacentes à sua tabela de cordas e é feita uma reconstrução dessa tabela contendo todos os arcos desde  $7\frac{1}{2}^\circ$  até  $180^\circ$ , em intervalos de  $7\frac{1}{2}^\circ$ .

A segunda grande personalidade abordada neste capítulo é Ptolomeu de Alexandria que escreve a mais influente e significativa obra trigonométrica da Antiguidade, o *Almagesto*. Ptolomeu construiu uma tabela de cordas, mais completa que Hiparco, com todos os arcos desde  $\frac{1}{2}^\circ$  até  $180^\circ$ , em intervalos de  $\frac{1}{2}^\circ$ . Neste capítulo apresentamos o conteúdo do capítulo dez do *Almagesto* com os teoremas e as respetivas provas, respeitando a ordem apresentada por Ptolomeu. Tem particular interesse a prova usada por Ptolomeu para obter o valor de  $\text{crd}(1^\circ)$  e o método de interpolação usado que permitiria encontrar o valor de  $\text{crd}\alpha$  para  $\alpha$  entre duas entradas da coluna dos arcos da tabela de cordas. Este capítulo termina com uma aplicação da tabela de cordas na astronomia na obtenção da excentricidade do Sol. Quer para Hiparco quer para Ptolomeu são feitas reconstruções das suas tabelas de cordas e comparações com os valores atualmente utilizados, usando o GeoGebra.

O Capítulo 3 é dedicado à *Trigonometria na Índia*. Começa-se por esclarecer de que forma os conhecimentos gregos influenciaram os primórdios da Trigonometria Indiana. De seguida, tendo em conta a linguagem utilizada, constata-se que o trabalho dos indianos assenta em semicordas. O primeiro matemático/astrónomo referido, neste capítulo, é Āryabhata e apresenta-se o método de construção da sua tabela de semicordas ou de R-senos, dada em incrementos de  $3\frac{3}{4}^\circ$  para ângulos compreendidos entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . Subjacente à tabela de R-senos está uma outra tabela que contém 24 diferenças e cuja construção será motivo de explanação. Segue-se Bhāskara I, que calcula os R-senos apresentando uma aproximação notável para o seno, escrita como razão entre duas funções quadráticas. Uma explicação geométrica para este método será apresentada. Com Brahmagupta encontramos um dos mais extraordinários métodos da Trigonometria indiana: este método, que começa com uma tabela de senos com apenas seis entradas, permite calcular o seno de qualquer arco com um único cálculo e com uma precisão surpreendente. A sua abordagem reduz-se a um esquema de interpolação de segunda ordem, que iremos acompanhar. No que aos matemáticos diz respeito, terminamos com Madhava que tomou o passo decisivo da passagem dos procedimentos finitos da matemática antiga ao infinito descobrindo, por exemplo, as séries de potências que representam senos e cossenos. À semelhança do capítulo anterior serão apresentadas aplicações das tabelas de semicordas, neste caso a equações planetárias. O capítulo encerra com a explicação da origem da palavra seno. Convém referir que ao longo do capítulo os valores obtidos para os vários métodos são comparados com os atuais, analisando-se, com recurso ao Excel e/ou ao GeoGebra, a sua precisão.

No Capítulo 4, fazemos uma incursão pela *Trigonometria no Império Árabe*. Observam-se grandes avanços na Trigonometria tornando-se cada vez mais próxima da forma como hoje a entendemos. Partindo das tradições gregas e indianas, nascem as seis funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante), o círculo unitário e muitas das fórmulas trigonométricas

hoje usadas. Al-Tusi foi pioneiro, tratando a trigonometria como uma nova disciplina matemática, independente da astronomia. Enunciou e provou a Lei dos Senos e aplicou-a para encontrar elementos desconhecidos de triângulos a partir de elementos conhecidos. Em relação às tabelas trigonométricas, os cientistas árabes foram bem mais longe do que os seus antecessores, e apresentaram essas tabelas com uma precisão crescente. Exemplo disso é o iraniano Al-Kāshī que calcula o seno de  $1^\circ$  com uma precisão a 10 casas decimais no seu Tratado sobre a Corda e o Seno. Para tal recorre à fórmula do ângulo triplo e a um processo iterativo que será descrito neste capítulo. As aplicações da Trigonometria no mundo árabe são várias, passando pela astronomia ou geografia. Possivelmente uma das aplicações da Trigonometria de maior importância no mundo árabe teve a ver com a prática religiosa e com a determinação precisa das horas, do calendário e da direção correta em que deveriam ser feitas as orações, a *qibla*. Recorrendo a trigonometria plana, veremos dois métodos de determinação da *qibla*, um de Al-Battānī e outro de Habash al-Hāsib que recorre a analemas (método de resolução de um problema por procedimentos gráficos).

O Capítulo 5 é dedicado à *Trigonometria em Portugal*. Começamos por fazer uma contextualização da histórica, da ciência e da matemática nos séculos que antecederam o matemático português Pedro Nunes. Relativamente a Pedro Nunes é apresentada uma curta biografia, as fontes livrescas a que recorreu e é sintetizada a sua bibliografia conhecida. De seguida, passamos a analisar de que forma a Trigonometria é tratada por Pedro Nunes. Estudamos com algum pormenor a *Anotação sobre as derradeiras palavras do Capítulo dos Climats*, que faz parte do Tratado da Sphera. Observa-se aí o génio de Pedro Nunes. Esta *Anotação* tornou-se muito conhecida em toda a Europa graças à difusão trazida pela versão latina de Élie Vinet (1509-1584) que a inclui nas muitas edições do Tratado da Sphera que promoveu. Servir-nos-emos de construções tridimensionais feitas no GeoGebra 5.0 para, mais facilmente, visualizar os resultados e obter as demonstrações efetuadas por Pedro Nunes na *Anotação*.

No Capítulo 6 são descritos mais alguns episódios da História da Trigonometria espaçados no tempo.

## **Parte 2**

O capítulo 7 e a Conclusão constituem a segunda parte desta dissertação.

No Capítulo 7, *Atividades*, são apresentadas quatro tarefas para desenvolver em sala de aula, destinadas a alunos dos Ensino Básico e Secundário. Com estas atividades, pretende-se desenvolver no aluno conhecimentos científicos através da história da Trigonometria, envolvendo capacidades de investigação, argumentação e demonstração com recurso ao Excel e/ou GeoGebra nas suas várias vistas (incluindo a 3D).

Finalizamos este trabalho, apresentando uma conclusão geral, onde a partir dos objetivos traçados se descrevem as limitações tidas na execução deste trabalho e se apresentam sugestões para investigações futuras, visando o estudo de episódios da História da Trigonometria não completamente explorados.



# Capítulo 1 – As origens da Trigonometria

A origem da *Trigonometria* é incerta. No entanto, pode dizer-se que o início do desenvolvimento da Trigonometria deu-se, principalmente, devido aos problemas gerados pela Astronomia, pela Agrimensura e pelas Navegações, por volta do século *IV* ou *V a. C.*, com os egípcios e babilónicos.

O Papiro de Rhind e a placa Plimpton 322 dão algumas pistas sobre estas origens. De fato, é possível encontrar problemas envolvendo a cotangente no Papiro Rhind e, também, uma notável tábua de secantes na placa cuneiforme babilónica Plimpton 322.

É sobre estes documentos que este breve capítulo se debruça.

No Papiro de Rhind encontra-se um conjunto de problemas sobre o *Seked* de uma pirâmide, questão essencial na construção das majestosas pirâmides egípcias. É apresentada a resolução de um desses problemas e observa-se de que forma está relacionado com a Trigonometria.

## 1.1. Papiro de Rhind (século IV a V a.C.) e Plimpton 322

### **Plimpton 322**

A fonte é Eves (1997).

Esta placa é talvez a mais notável das placas matemáticas babilónicas analisadas e faz parte da coleção G.A. Plimpton da Universidade de Columbia de Nova Iorque, catalogada com o número 322. A placa foi escrita no período Babilónico Antigo - aproximadamente entre 1900 e 1600 *a. C.* - e os primeiros a descrever seu conteúdo foram Neugebauer e Sachs em 1945. A placa contém uma notável tábua de secantes.

### **Papiro de Rhind**

A fonte é Boyer (1996).

Alguns papiros egípcios resistiram ao desgaste do tempo por mais de três milénios e meio. O mais extenso dos papiros de natureza matemática é um rolo de papiro com cerca de 0,30 *m* de altura e 5 *m* de comprimento, que está agora no British Museum, exceto uns fragmentos que estão no Brooklyn Museum. Foi comprado em 1858 numa cidade à beira do Nilo, por um antiquário escocês, Henry Rhind, que lhe emprestou o nome. Às vezes, é chamado Papiro Ahmes em honra ao escriba que o copiou por volta de 1650 *a. C.*. O escriba conta que o material provém de um protótipo do Reino do Meio, de cerca de 2000 a 1800 *a. C.*, e é possível que, parte desse conhecimento, seja oriundo de

Imhotep, o quase lendário arquiteto e médico do Faraó Zoser, que superintendeu a construção da sua pirâmide há cerca de 5000 anos.



Ilustração 1 - Papiro de Rhind<sup>1</sup>

## 1.2. O *seked* de uma Pirâmide

A fonte é Estrada et al (2000).

Ainda que não se possa falar da existência de trigonometria (no sentido atual) no antigo Egito, podemos dizer que existia uma trigonometria rudimentar que assentava numa simples teoria de triângulos semelhantes. Se pensarmos nas enormes edificações construídas pelo povo egípcio, nomeadamente nas grandes pirâmides, facilmente percebemos que não poderiam ter sido realizadas sem um conhecimento mínimo de relações trigonométricas.

No Egito, isto pode ser observado no Papiro de Rhind, a que já nos referimos, que contém oitenta e quatro problemas, dos quais quatro fazem menção ao *seked* de uma pirâmide e que é a medida de inclinação de uma pirâmide relativamente à base.

Os egípcios mediam a inclinação de uma face de uma pirâmide através da razão entre o “afastamento horizontal” e a “elevação vertical”, ou seja, através do afastamento da face oblíqua da vertical para cada unidade de altura.

A unidade de medida da altura era dada em côvados e a unidade de medida horizontal era dada em palmos, onde num 1 côvado cabem 7 palmos.

<sup>1</sup> Fonte: <[http://simple.wikipedia.org/wiki/File:Rhind\\_Mathematical\\_Papyrus.jpg](http://simple.wikipedia.org/wiki/File:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg)> 25/11/2012

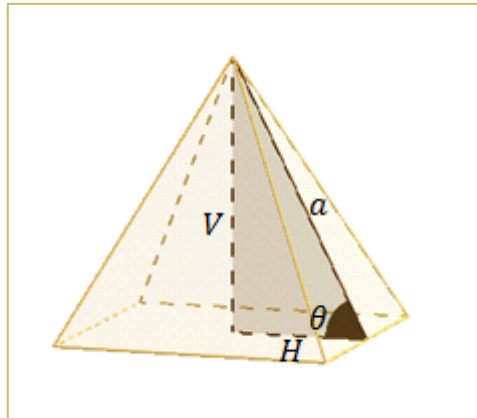


Ilustração 2 - *Seked* de uma pirâmide, I

Vejamos o problema do papiro de Rhind, com o número 56. Nesse problema pretende-se a determinação do *seked* de uma pirâmide de 250 côvados de altura e cujos lados da sua base medem 360 côvados.

A razão entre o afastamento horizontal ( $H$ ) e a altura ( $V$ ) é dada por:

$$\frac{H}{V} = \frac{180}{250} = \frac{18}{25}.$$

O quociente  $\frac{180}{250}$  corresponde a  $\cot \theta$  mas não se trata do *seked* da pirâmide. O escriba para obter o *seked* multiplica este quociente por 7 (1 côvado são 7 palmos) e obtém:

$$S = \frac{126}{25} = 5 \frac{1}{25}.$$

O *seked* é dado em palmos por côvado e corresponde ao comprimento medido na horizontal, a partir da face lateral da pirâmide, relativo à altura de 1 côvado.

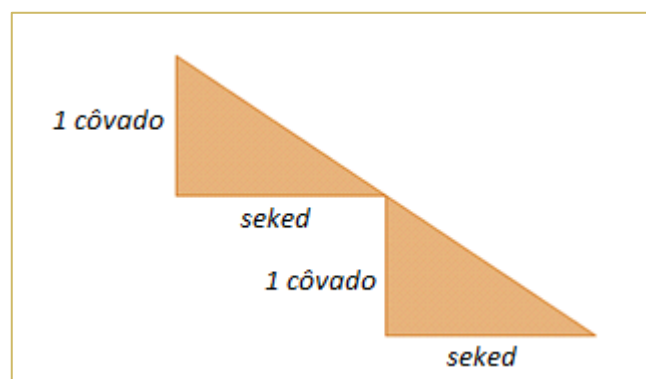


Ilustração 3 - *Seked* de uma pirâmide, II

Desta forma, como a pirâmide é construída em camadas desde a base, a inclinação é rigorosamente conservada!



## Capítulo 2 – A Trigonometria na Grécia

Este capítulo pretende rever, com algum pormenor, as duas personagens gregas que mais contribuíram para o desenvolvimento da Trigonometria plana: Hiparco e Ptolomeu.

O presente ponto inclui, passo a passo, os resultados a que Hiparco e Ptolomeu recorreram para construir as suas tabelas de cordas. Todos os resultados são acompanhados de demonstrações.

Em cada um dos casos, é feita uma comparação entre os valores obtidos nas tabelas de cordas com os valores atuais do seno, recorrendo ao GeoGebra.

No caso de Ptolomeu, ainda se observa de que forma a tabela de cordas que obteve foi usada na Astronomia.

### 2.1. Hiparco de Bitínia ou Niceia (190 a 120 a.C.)

A fonte é Katz (2010) e o Site Web Hiparco (2012).

O astrónomo *Hiparco de Niceia*, por volta de 180 a 125 *a.C.*, ganhou o direito de ser chamado o pai da Trigonometria pois, na segunda metade do século *II a.C.*, surge um tratado da sua autoria com doze livros que contém uma construção do que pode ter sido a primeira tábua trigonométrica e que inclui uma tábua de cordas. Hiparco fez esses cálculos para usá-los nos seus estudos de Astronomia.

Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilónica e a obra de Ptolomeu. As suas principais contribuições à Astronomia dizem respeito à organização de dados empíricos dos babilónios, bem como a elaboração de um catálogo estelar, melhoramentos em constantes astronómicas importantes (duração do mês e do ano, o tamanho da Lua, o ângulo de inclinação da eclíptica) e, finalmente, a descoberta da precessão dos equinócios.



Ilustração 4 - Hiparco de Niceia num selo grego<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Fonte: <<http://www.astronomia-iniciacion.com/personajes/hiparco-de-nicea.html>> 2/12/2012



A *Trigonometria* era, então, baseada no estudo da relação entre um arco arbitrário e a sua corda. Hiparco escreve sobre o cálculo de comprimentos das cordas. Apesar da corda de um arco não ser o seno, uma vez conhecido o valor do seu comprimento, pode-se calcular o seno da metade do arco, pois a metade do comprimento da corda dividido pelo comprimento do raio do círculo é, justamente, esse valor. Ou seja, para um círculo de raio unitário, o comprimento da corda subtendida por um ângulo  $x$  é  $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ , conforme a Ilustração 5:

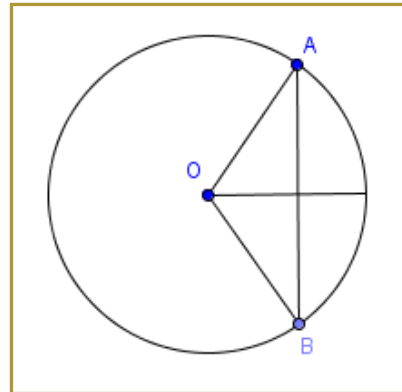


Ilustração 5 - Comprimento de uma corda subtendida por um ângulo

$$\hat{AOB} = x$$

$$\overline{OB} = r$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\overline{AB}}{2r}$$

## 2.1.1. Cálculo de alguns ângulos

### 2.1.1.1) 1º Passo: a determinação do raio

Hiparco sabia que:

- $2\pi r$  é o perímetro de um círculo de raio  $r$ ;
- a circunferência está dividida em 360 partes ou graus;
- o diâmetro está dividido em 120 partes e cada uma dessas partes é a unidade de comprimento;
- cada parte da circunferência ou do diâmetro está dividida em 60 partes, cada uma destas em 60 partes e por aí a diante, de acordo com o sistema de frações sexagesimais;
- $3;8,30$  é uma aproximação de  $\pi$  na base sexagesimal:  $3;8,30 = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = 3,1416666\ldots$

Hiparco calculou o raio do seguinte modo:

$$\begin{aligned} C = 2\pi r &\Leftrightarrow r = \frac{C}{2\pi} = \\ &= \frac{360^\circ \times 60'}{2 \times 3;8,30} = \\ &= \frac{21600'}{6;17} = \\ &= 3438'. \end{aligned}$$

Porque a circunferência tem  $360^\circ$  e cada grau tem 60 minutos.

O fato de Hiparco usar como unidade o minuto para o comprimento da circunferência trouxe vantagens: encontra-se, desta forma, o comprimento em minutos do arco que ao ser “esticado” é transformado no raio.

### 2.1.1.2) 2º Passo: a determinação dos arcos de 60° e 90°

- Para um ângulo de 60°, o raio é o valor de  $crd(60^\circ)$  pois o ângulo ao centro forma um triângulo equilátero em que os lados são iguais ao raio.

- Para um ângulo de 90°, a corda é igual a  $r\sqrt{2}$  conforme a Ilustração 6:

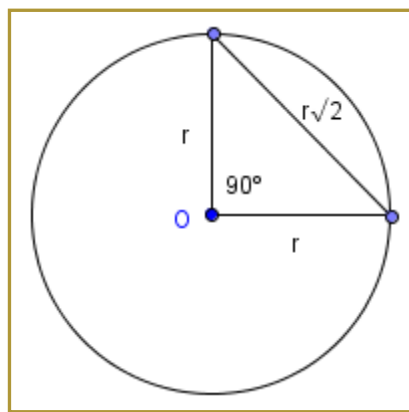


Ilustração 6 - Corda de um ângulo de 90°

Assim  $crd(90^\circ) = r\sqrt{2} = 3438' \times 1,414 = 4862' = 81,2$  (pois  $4862 = 81 \times 60 + 2 \times 1$ ).

### 2.1.1.3.) 3º Passo: fórmula da corda do ângulo suplementar

**Proposição 1:** Se  $crd(\alpha)$  é a corda do ângulo  $\alpha$ , então a corda do ângulo suplementar ( $180^\circ - \alpha$ ) é dada por:

$$crd(180^\circ - \alpha) = \sqrt{4r^2 - crd^2(\alpha)}. \quad 1)$$

**Demonstração:**

Observe-se a Ilustração 7:

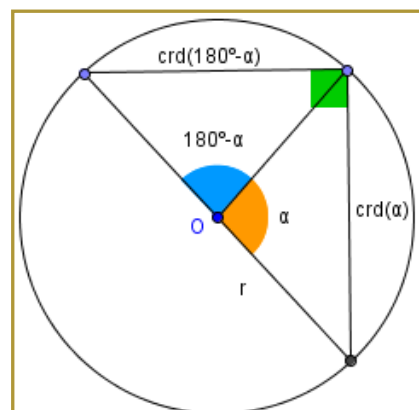


Ilustração 7 – Fórmula da corda do ângulo suplementar

Aplicando o teorema de Pitágoras na Ilustração 7 temos:

$$crd^2(180^\circ - \alpha) + crd^2\alpha = (2r)^2,$$

donde resulta a fórmula 1).

Esta fórmula permite determinar apenas as cordas dos ângulos compreendidos entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .

Como sabemos que  $crd(\alpha) = 2r \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , substituindo em 1) vem:

$$crd(180^\circ - \alpha) = \sqrt{4r^2 - 4r^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 2r \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 2r \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \text{ (2)}$$

que nos dá a relação entre a corda do ângulo suplementar e a função cosseno.

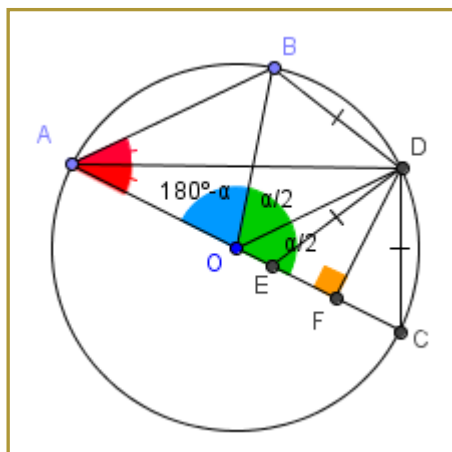
#### 2.1.1.4) 4º Passo: fórmula da corda do ângulo metade

**Proposição 2:** Se  $\text{crd}(180^\circ - \alpha)$  é a corda do ângulo suplementar então a corda do ângulo metade é dada por:

$$crd\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{2r^2 - r \cdot crd(180^\circ - \alpha)}. \text{ 3)}$$

**Demonstração:**

Observe-se a Ilustração 8:



**Ilustração 8 – Fórmula da corda do ângulo metade**

Seja  $E$  um ponto sobre  $AC$  de modo que  $AB = AE$ .

Note-se que  $\text{crd}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = DC = BD$ , donde  $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ .

Os triângulos  $AED$  e  $ABD$  são semelhantes pelo critério  $LAL$  pois  $AD$  é um lado comum,  $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$  e  $AB = AE$  por construção.

Assim  $BD = DE$  e como  $BD = DC$ , por transitividade, resulta que  $DE = DC$ .

Seja  $DF$  a perpendicular baixada sobre  $AC$  e que passa por  $D$ . Assim:

$$CF = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}(AC - AE) = \frac{1}{2}(AC - AB). \quad \text{4)}$$

Como  $AC = 2r$  e  $AB = \text{crd}(180^\circ - \alpha)$  vem:

$$CF = \frac{1}{2}(2r - \text{crd}(180^\circ - \alpha)). \quad \text{5)}$$

Mas os triângulos  $ACD$  e  $DCF$  são semelhantes pelo critério  $AA$ , pois  $\widehat{D} = \widehat{F} = 90^\circ$  e o ângulo em  $C$  é comum aos dois triângulos. Daqui resulta:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{CF} \Leftrightarrow CD^2 = AC \cdot CF \quad \text{6)}$$

Como  $CD = \text{crd}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  e  $AC = 2r$ , usando a expressão 4), podemos reescrever a expressão 6) na forma:

$$\text{crd}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2r \cdot \frac{1}{2}(2r - \text{crd}(180^\circ - \alpha)) = 2r^2 - r \cdot \text{crd}(180^\circ - \alpha).$$

**Corolário 1:** Em notação moderna, a expressão 3) é equivalente a:

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha). \quad \text{7)}$$

**Demonstração:**

Elevando ao quadrado a expressão 3) obtém-se  $\text{crd}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2r^2 - r \cdot \text{crd}(180^\circ - \alpha)$ .

Sabemos que  $\text{crd}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2r \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)$  (basta fazer  $y = \frac{\alpha}{2}$  e  $\text{crd}(y) = 2r \sin\left(\frac{y}{2}\right)$ ).

Por outro lado por 2) obtém-se:

$$\left[2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right]^2 = \text{crd}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2r^2 - r \cdot \text{crd}(180^\circ - \alpha) = 2r^2 - r \cdot 2r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2r^2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

Donde:

$$4r^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right) = 2r^2 \left(1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

Com estes resultados, Hiparco podia calcular a corda para todos os ângulos desde  $7\frac{1}{2}^\circ$  até  $180^\circ$ , em intervalos de  $7\frac{1}{2}^\circ$ .

### 2.1.1.5) Aplicações

- Por exemplo, aplicando a fórmula do ângulo metade três vezes a  $\text{crd}(60^\circ)$  obtém-se  $\text{crd}\left(7\frac{1}{2}^\circ\right)$ .
- A partir do valor anterior, usando a fórmula da corda do ângulo suplementar obtém-se  $\text{crd}\left(172\frac{1}{2}^\circ\right)$ .

## 2.1.2. Reconstrução da tabela de cordas de Hiparco

Tabela 1 - Tabela de cordas de Hiparco

| $\theta$              | $\text{crd}\theta$ |
|-----------------------|--------------------|
| $0^\circ$             | 0                  |
| $7\frac{1}{2}^\circ$  | 450                |
| $15^\circ$            | 897                |
| $22\frac{1}{2}^\circ$ | 1341               |
| $30^\circ$            | 1780               |
| $37\frac{1}{2}^\circ$ | 2210               |
| $45^\circ$            | 2631               |
| $52\frac{1}{2}^\circ$ | 3041               |
| $60^\circ$            | 3438               |

|                          |      |
|--------------------------|------|
| $67\frac{1}{2}^{\circ}$  | 3820 |
| $75^{\circ}$             | 4186 |
| $82\frac{1}{2}^{\circ}$  | 4533 |
| $90^{\circ}$             | 4862 |
| $97\frac{1}{2}^{\circ}$  | 5169 |
| $105^{\circ}$            | 5455 |
| $112\frac{1}{2}^{\circ}$ | 5717 |
| $120^{\circ}$            | 5954 |
| $127\frac{1}{2}^{\circ}$ | 6166 |
| $135^{\circ}$            | 6352 |
| $142\frac{1}{2}^{\circ}$ | 6511 |
| $150^{\circ}$            | 6641 |
| $157\frac{1}{2}^{\circ}$ | 6743 |
| $165^{\circ}$            | 6817 |
| $172\frac{1}{2}^{\circ}$ | 6861 |
| $180^{\circ}$            | 6875 |

### 2.1.3. Construção da tabela de uma tabela de cordas com as fórmulas de Hiparco usando o GeoGebra

A animação do seletor irá produzir uma tabela onde ficam registados os valores do ângulo ao centro, do seu suplementar e da sua metade. Simultaneamente, são medidas as cordas correspondentes ao ângulo suplementar e ao ângulo metade. Os valores destas cordas são comparados com as fórmulas de Hiparco. Como ficam registados os valores destas cordas, a tabela de Hiparco é naturalmente gerada.

A hiperligação para esta animação é: [Hiparco.ggb](http://Hiparco.ggb)

No Anexo a este trabalho encontra-se um *print screen* do ficheiro.

### 2.1.4. Tabela de Hiparco: algumas considerações

Não há dados que comprovem como Hiparco construiu a sua tabela, pois muitos registros estão perdidos. Porém ao comentar as tabelas de Ptolomeu, no século *IV*, Téon de Alexandria fez referência a um tratado de doze livros que Hiparco havia escrito sobre cordas num círculo, e que, provavelmente, os seus métodos fossem parecidos com os utilizados posteriormente por Ptolomeu.

Desta forma, pressupõe-se que as teorias de Hiparco podem ter contribuído grandemente para a realização da mais importante obra da Trigonometria da Antiguidade, o *Almagesto* de Cláudio Ptolomeu.

### 2.2. Menelau (70-140)

Outro matemático grego, Menelau de Alexandria, por volta de 100 *d.C.*, produziu um tratado sobre cordas num círculo, composto por seis livros, porém vários deles perderam-se. Felizmente o seu tratado *Sphaerica*, em três livros, preservou-se numa versão árabe e é o trabalho mais antigo conhecido sobre trigonometria esférica. A trigonometria esférica não será alvo de tratamento, dado afastar-se do objetivo deste trabalho.

### 2.3. Ptolomeu (100 – 178)

A mais influente e significativa obra trigonométrica da Antiguidade foi *Mathematiki Syntaxis*, obra escrita por Ptolomeu de Alexandria e que é composta por treze livros. Contém uma descrição matemática completa do modelo grego do universo com parâmetros para os vários movimentos do Sol, da Lua e dos planetas. Substituiu todos os trabalhos anteriores no seu campo, sendo o trabalho astronômico com mais influência desde o tempo em que foi escrito até ao século *XVI*. Mais tarde no Império Árabe chamaram-no de *Almagesto*, e a partir de então a obra passou a ser conhecida por esse nome.



Ilustração 9 – Ptolomeu<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Fonte: <<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Ptolemaeus.jpg>> 8/12/2012

### 2.3.1. Construção da tabela de cordas de Ptolomeu

Mostrando a mesma influência babilônica apresentada por Hiparco, Ptolomeu dividiu a circunferência em 360 partes e o diâmetro em 120 partes. Usou  $\frac{377}{120}$  como aproximação para o número  $\pi$ .

Utilizou  $r = 60$  em vez de  $r = 57,18$  de Hiparco.

Ptolomeu construiu uma tabela de cordas mais completa que Hiparco. De fato, a sua tabela de cordas contém todos os arcos desde  $\frac{1}{2}^\circ$  até  $180^\circ$  em intervalos de  $\frac{1}{2}^\circ$ . Por outro lado, encontrou um esquema para interpolar entre os valores calculados. Tudo isto implicou mais geometria do que a usada por Hiparco.

Apresenta-se de seguida o conteúdo do capítulo dez do Almagesto: mostram-se os teoremas e as respectivas provas pela ordem apresentada por Ptolomeu. A notação e a linguagem são de Aaboe (1964).

#### 2.3.1.1) Notação

Representemos por  $c_n$  a corda  $\frac{1}{n}$  da circunferência de um círculo. Se o raio é 60, temos:

$$c_n = \text{crd} \frac{360^\circ}{n}.$$

#### 2.3.1.2) Construção da corda de $36^\circ$ e seu cálculo

Para calcular os comprimentos das cordas dos ângulos de  $36^\circ$  e  $72^\circ$ , que correspondem aos lados do decágono e pentágono regulares inscritos no círculo, Ptolomeu recorreu aos Elementos de Euclides, mais propriamente à construção aí apresentada de um decágono regular e de um pentágono regular.

A construção que Euclides, nos seus Elementos, utiliza para inscrever um decágono regular num círculo de centro  $O$  e raio  $r$  dá-nos o valor de  $\text{crd}36^\circ$ .

Observe-se a Ilustração 10:

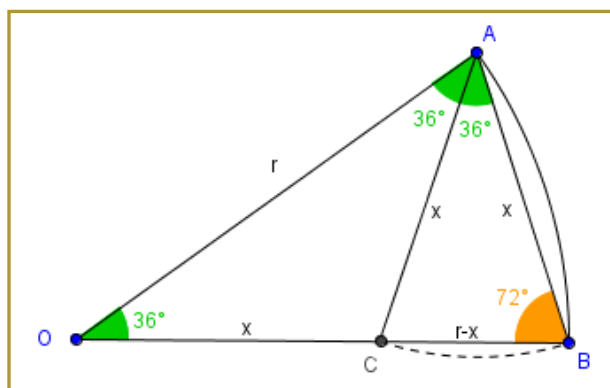


Ilustração 10 - Construção da corda de  $36^\circ$ , I



Considere-se um triângulo isósceles  $AOB$  em que o ângulo  $AOB$  tem de amplitude  $36^\circ$ . O ângulo  $AOB$  é o ângulo ao centro de um decágono regular pois  $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$  e assim  $x = AB$  é o lado do decágono.

Os segmentos  $OB$  e  $AO$  são os raios do círculo de medida  $r$ . Determine-se  $C$  tal que  $AC = x$ , desenhando um arco de circunferência com centro em  $A$  e raio  $AB$ . O triângulo  $ABC$  é assim isósceles e os ângulos da base  $CB$  são iguais e valem  $72^\circ$ . Obtém-se  $\hat{CAB} = 180^\circ - 72^\circ \times 2 = 36^\circ$  e  $\hat{OAC} = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$ . No triângulo  $OAC$  os ângulos da base  $AO$  são iguais a  $36^\circ$  e, por isso, este triângulo é isósceles. Como a ângulos iguais se opõem lados iguais  $CA = OC = x$ . Consequentemente  $CB = r - x$ .

Os triângulos  $AOB$  e  $BAC$  são semelhantes pelo critério  $AA$  pois:

$$-\hat{ACB} = \hat{OAB} = 72^\circ;$$

$$-\hat{BAC} = \hat{AOB} = 36^\circ.$$

Assim, podemos escrever:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{OB}{AB} \Leftrightarrow \frac{x}{r-x} = \frac{r}{x} \Leftrightarrow x^2 = r^2 - rx \Leftrightarrow x^2 + rx - r^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1r \pm r\sqrt{5}}{2}. \text{ 8)}$$

Escolhendo apenas a solução positiva obtemos:

$$x = \frac{1}{2}r \cdot (\sqrt{5} - 1).$$

Chegou-se a uma expressão que dá o lado do decágono em função do raio  $r$  da circunferência circunscrita. Se  $r$  for dado, então  $x$  pode ser calculado.

Note-se que se  $r = 1$  obtemos  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,6180\dots$ . Este é o *número de ouro*.

Veja-se agora como construir  $x$  com régua e compasso. De novo, recorre-se aos Elementos de Euclides.

Considere-se a Ilustração 11:

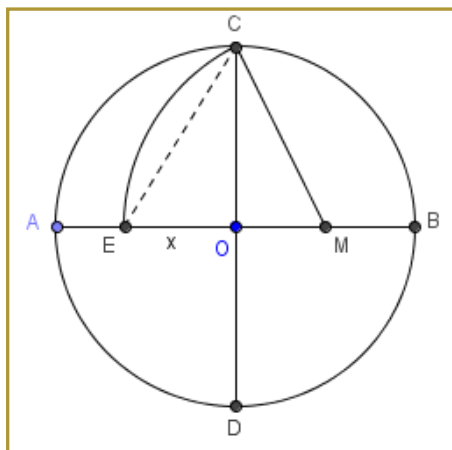


Ilustração 11 - Construção da corda de  $36^\circ$ , II

Sejam  $AB$  e  $CD$  dois diâmetros perpendiculares num círculo de centro  $O$  e raio  $r$ . Seja  $M$  o ponto médio de  $OB$ . Com centro em  $M$  e raio  $MC$ , trace-se o arco que intersesta  $AO$  em  $E$ . Vamos mostrar que  $OE$  é o lado do decágono regular inscrito no círculo que estamos a considerar.

Do Teorema de Pitágoras resulta:

$$MC = \sqrt{OM^2 + OC^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}r\right)^2 + r^2} = \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + r^2} = \sqrt{\frac{5}{4}r^2} = \frac{1}{2}r\sqrt{5}.$$

Logo  $OE = ME - MO = MC - MO = \frac{1}{2}r\sqrt{5} - \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1)$ . Assim  $OE$  é o lado do decágono.

Sabendo como construir o lado do decágono, usando a Ilustração 11 que nos dá essa construção e usando 120 como diâmetro, temos:

$$OM = 30 \text{ e } OC = 60.$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$MC^2 = 30^2 + 60^2 = 4500.$$

Ptolomeu recorre a uma tabela de raízes e obtém:

$$MC = 67;4,55.$$

E agora:

$$EO = EM - OM = MC - OM = 67;4,55 - 30 = 37;4,55.$$

Pela construção que vimos anteriormente sabemos que:

$$EO = c_{10} = 37;4,55.$$

### 2.3.1.3) Construção da corda de $72^\circ$ e seu cálculo

Na Ilustração 11, começa-se por ver que  $CE$  é o lado de um pentágono regular ou seja é  $c_5$ , donde:

$$c_5^2 = c_{10}^2 + r^2.$$

Na Ilustração 12, traça-se a altura  $AD$  do triângulo  $ABC$ .

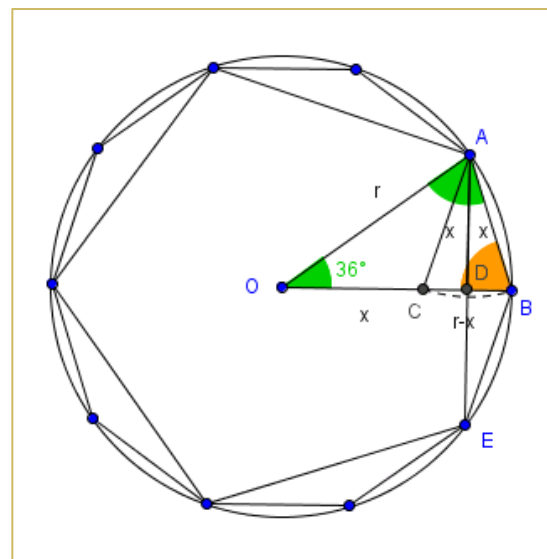


Ilustração 12 – Construção da corda de  $72^\circ$

Como  $x = c_{10}$  e  $AD$  é metade da corda correspondente ao dobro do arco  $AB$  vem:

$$AD = \frac{1}{2}c_5.$$

Note-se que  $OC = x = c_{10}$  e, portanto,  $CB = r - x = r - c_{10}$  e:

$$DB = \frac{1}{2}(r - c_{10}).$$

No triângulo retângulo  $ADB$  temos:

$$\begin{aligned} AD^2 + DB^2 &= AB^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}c_5\right)^2 + \left[\frac{1}{2}(r - c_{10})\right]^2 = c_{10}^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}c_5^2 + \frac{1}{4}(r - c_{10})^2 = c_{10}^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}c_5^2 + \frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{2}rc_{10} + \frac{1}{4}c_{10}^2 = c_{10}^2 \Leftrightarrow c_5^2 + r^2 - 2rc_{10} + c_{10}^2 = 4c_{10}^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow c_5^2 = 3c_{10}^2 + 2rc_{10} - r^2. \text{ 9)} \end{aligned}$$

A partir da relação 8),  $\frac{r}{x} = \frac{x}{r-x}$ , antes obtida, vem:

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{r-x} \Leftrightarrow \frac{r}{c_{10}} = \frac{c_{10}}{r-c_{10}} \Leftrightarrow r^2 - rc_{10} - c_{10}^2 = 0 \Leftrightarrow rc_{10} = r^2 - c_{10}^2. \text{ 10)}$$

Substituindo 10) em 9) vem:

$$c_5^2 = 3c_{10}^2 + 2(r^2 - c_{10}^2) - r^2 = c_{10}^2 + r^2.$$

Voltando à Ilustração 11, como  $EO = 37;4,55$  vem  $EO^2 = 1375;4,15$  e  $OC^2 = 60^2 = 3600$  e usando o teorema de Pitágoras:

$$EO^2 + OC^2 = CE^2 = 4975;4,15.$$

e logo:

$$CE = 70;32,3 = c_5.$$

Assim:

$$c_5 = \text{crd}72^\circ = 70;32,3.$$

#### 2.3.1.4) Cálculo da corda de $60^\circ$

$$c_6 = \text{crd} \frac{360^\circ}{6} = \text{crd}60^\circ = 60, \text{ pois } c_6 \text{ é o raio da circunferência.}$$

### 2.3.1.5) Cálculo da corda de 90°

Da Ilustração 13 vem:

$$c_4^2 = 2r^2 = 2 \cdot 60^2 = 7200.$$

Recorrendo a uma tabela de raízes, Ptolomeu concluiu que:

$$c_4 = \text{crd}\left(\frac{360^\circ}{4}\right) = \text{crd}90^\circ = 84;51,10.$$

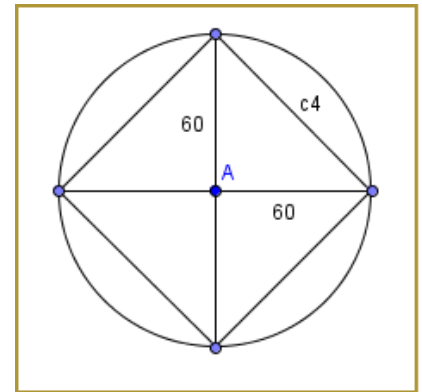


Ilustração 13 - Cálculo da corda de 90°

### 2.3.1.6) Fórmula da corda do arco suplementar

Observe-se a Ilustração 14:

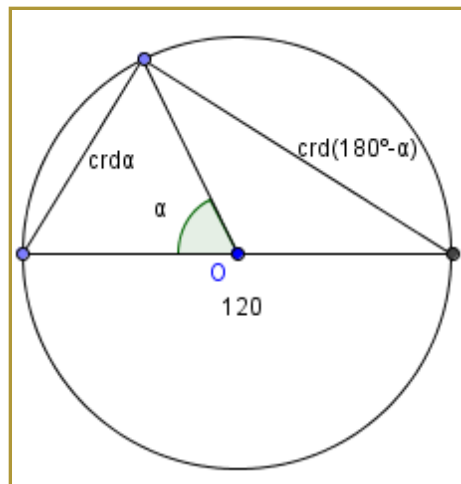


Ilustração 14 - Fórmula da corda do arco suplementar

Conhecida a corda de um arco, obtemos a corda do arco suplementar da seguinte maneira:

$$\text{crd}(180^\circ - \alpha) = \sqrt{(2r)^2 - \text{crd}^2 \alpha} = \sqrt{120^2 - \text{crd}^2 \alpha} = \sqrt{14400 - \text{crd}^2 \alpha},$$

pois o triângulo está inscrito numa semicircunferência.

Um exemplo apresentado por Ptolomeu de aplicação da corda do arco suplementar é o seguinte:

$$\text{crd}(144^\circ) = \sqrt{14400 - \text{crd}^2 36^\circ} = \sqrt{14400 - 1375;4,15} = \sqrt{13024;55,45} = 114;7,37.$$

## 2.3.2. O Teorema de Ptolomeu

### 2.3.2.1) Demonstração do Teorema de Ptolomeu

O Teorema de Ptolomeu ajudou Ptolomeu a obter novas fórmulas e completar a sua tabela. Podemos encontrar o Teorema de Ptolomeu no nono capítulo do livro I do Almagesto.

**Teorema 1:** Num quadrilátero inscrito numa circunferência, o produto das diagonais é igual a soma dos produtos dos lados opostos, isto é,

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + DA \cdot CB.$$

**Demonstração:**

**Caso 1** - Observe-se a Ilustração 15:

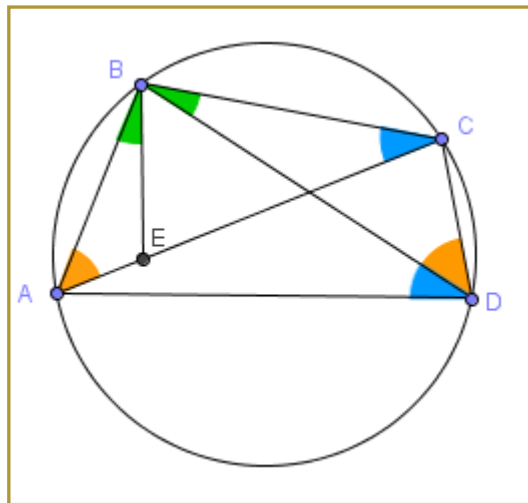


Ilustração 15 - Teorema de Ptolomeu, caso 1

Seja  $ABCD$  o quadrilátero inscrito da Ilustração 15. Traça-se  $BE$  de modo que  $\widehat{ABE} = \widehat{DBC}$ . Como os ângulos  $BDC$  e  $BCA$  têm a mesma amplitude (pois são ângulos inscritos no mesmo arco), os triângulos  $ABE$  e  $DBC$  são semelhantes pelo critério AA. Assim:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD} \Leftrightarrow AE \cdot BD = AB \cdot CD \text{ . 11)}$$

Analogamente, os triângulos  $CBE$  e  $ADB$  são semelhantes pelo critério AA pois  $\widehat{BCE} = \widehat{BDA}$  (são ângulos inscritos no mesmo arco) e  $\widehat{EBC} = \widehat{EBD} + \widehat{DBC} = \widehat{EBD} + \widehat{ABE} = \widehat{ABD}$  donde vem:

$$\frac{CE}{AD} = \frac{BC}{BD} \Leftrightarrow BC \cdot AD = BD \cdot CE \text{ . 12)}$$

**Caso 2-** Observe-se a Ilustração 16:

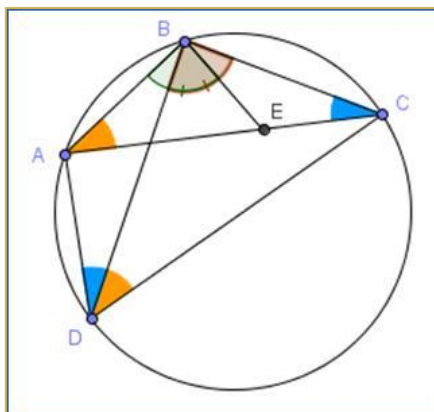


Ilustração 16 – Teorema de Ptolomeu, caso 2

Seja  $ABCD$  o quadrilátero inscrito da Ilustração 16. Tracemos  $BE$  de modo que  $\widehat{ABE} = \widehat{DBC}$ . Como os ângulos  $BDC$  e  $BCA$  têm a mesma amplitude (pois são ângulos inscritos no mesmo arco), os triângulos  $ABE$  e  $BCD$  são semelhantes pelo critério  $AA$ . Assim:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD} \Leftrightarrow AE \cdot BD = AB \cdot CD \quad .13)$$

Analogamente, os triângulos  $CBE$  e  $DBA$  são semelhantes pelo critério  $AA$  pois  $\widehat{BCE} = \widehat{BDA}$  (são ângulos inscritos no mesmo arco) e  $\widehat{ECB} = \widehat{DBC} + \widehat{DCE} = \widehat{ABE} - \widehat{DCE} = \widehat{ABD}$  donde vem:

$$\frac{CE}{AD} = \frac{BC}{BD} \Leftrightarrow BC \cdot AD = BD \cdot CE \quad .14)$$

Quer no Caso 1 quer no Caso 2, adicionando membro a membro as expressões 11) e 12), 13) e 14), obtemos:

$$AE \cdot BD + CE \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD \Leftrightarrow (AE + CE) \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Sendo  $AE + CE = AC$ , decorre o resultado.

### 2.3.2.2) Fórmula da diferença de dois arcos

Para calcular a fórmula para a corda da diferença de dois arcos  $\alpha$  e  $\beta$ , Ptolomeu:

- considerou  $AD$  como diâmetro da circunferência:
- usou o Teorema com  $AC = \text{crd} \alpha$  e  $AB = \text{crd} \beta$ , ambos dados.

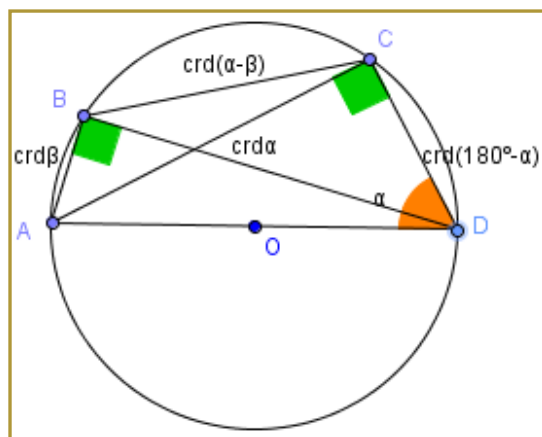


Ilustração 17 – Fórmula da diferença de dois arcos

Como  $BC = \text{crd}(\alpha - \beta)$  vem:

$$BC = \frac{AC \cdot BD - AB \cdot CD}{AD} \Leftrightarrow \text{crd}(\alpha - \beta) = \frac{\text{crd}\alpha \cdot BD - \text{crd}\beta \cdot CD}{d} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{crd}(\alpha - \beta) = \frac{\text{crd}\alpha \cdot \text{crd}(180^\circ - \beta) - \text{crd}\beta \cdot \text{crd}(180^\circ - \alpha)}{d}.$$

Se  $d = 1$  a igualdade anterior é, facilmente, traduzida na fórmula moderna do seno da diferença de dois ângulos:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha.$$

### 2.3.2.3) Aplicações da Fórmula da diferença de dois arcos

Com a fórmula da diferença de dois arcos pode-se obter a corda que subentende o arco de  $12^\circ$  a partir das cordas que subentendem os arcos de  $72^\circ$  e  $60^\circ$ .

### 2.3.2.4) Fórmula da corda do arco metade

Observe-se a Ilustração 18:

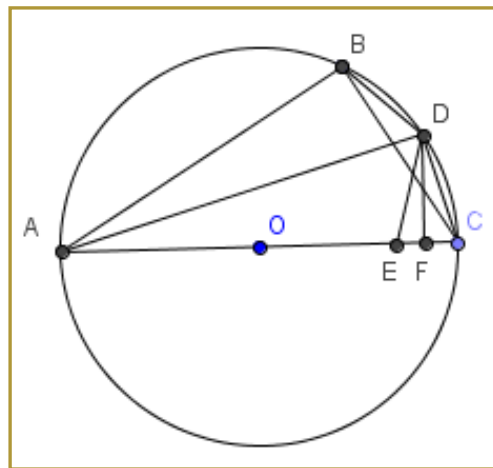


Ilustração 18 - Fórmula da corda do arco metade

Seja  $BC$  uma corda dada. Desenhe-se o diâmetro  $AC$  a partir de  $C$ . Seja  $D$  o ponto médio do arco  $BC$ . Trace-se a perpendicular  $DF$  a partir de  $D$  sobre  $AC$ .

O objetivo é encontrar  $DC$ . Para isso, vamos primeiro mostrar que  $FC$  é igual a  $\frac{1}{2} \cdot (AC - AB)$ .

Começamos por marcar  $E$  tal que  $AE = AB$ .

Os triângulos  $BAD$  e  $EAD$  são congruentes pelo critério  $LAL$  pois:

- os ângulos em  $A$  são iguais já que  $D$  bissecta o arco  $BC$ ;
- $AD$  é um lado comum aos dois triângulos;
- $AE = AB$ .

Daqui resulta  $DE = BD$ .

Como  $BD = DC$  então  $DE = DC$  e por isso o triângulo  $EDC$  é isósceles.

$DF$  é perpendicular a  $AC$  por construção e é, assim, uma altura e mediana do triângulo  $EDC$ , donde resulta  $EF = FC$ .

Obtemos então o resultado pretendido:

$$FC = \frac{1}{2} \cdot (AC - AE) = \frac{1}{2} \cdot (AC - AB).$$

Como  $AC = 120$  e  $AB$  pode ser determinado pois é a corda do suplementar do arco  $BC$ , então  $FC$  pode ser calculado.

Para mostrar que  $DC$  pode ser encontrado, aplicamos ao triângulo  $ADC$  o *Corolário de Euclides VI,8*: um lado num triângulo retângulo é a média proporcional (ou média geométrica: a média geométrica de dois números é igual à raiz quadrada do produto dos dois números, donde o quadrado da média geométrica de dois números é igual ao seu produto) entre a sua projecção na hipotenusa e a hipotenusa (cuja demonstração está no Anexo) e obtemos:

$$DC^2 = AC \cdot FC = 120 \cdot FC = 120 \cdot \frac{1}{2} \cdot (AC - AB).$$

Se ao arco  $BC$  chamarmos  $\alpha$ , podemos escrever:

$$\text{crd}^2 \frac{\alpha}{2} = 120 \cdot \frac{1}{2} \cdot (120 - \text{crd}(180^\circ - \alpha)) = 60 \cdot (120 - \text{crd}(180^\circ - \alpha)),$$

que se pode traduzir na notação atual por:

$$\sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos \alpha).$$

Ptolomeu, agora, mostra que a partir da  $\text{crd}12^\circ$  pode-se determinar  $\text{crd}6^\circ$ ,  $\text{crd}3^\circ$ ,  $\text{crd}1\frac{1}{2}^\circ$ ,  $\text{crd}\frac{3}{4}^\circ$ , usando a fórmula do arco metade repetidamente.

E daqui resulta  $\text{crd}1\frac{1}{2}^\circ = 1;34,15$  e  $\text{crd}\frac{3}{4}^\circ = 0;47,8$ .



### 2.3.2.5) Fórmula da soma de dois arcos

Observe-se a Ilustração 19:

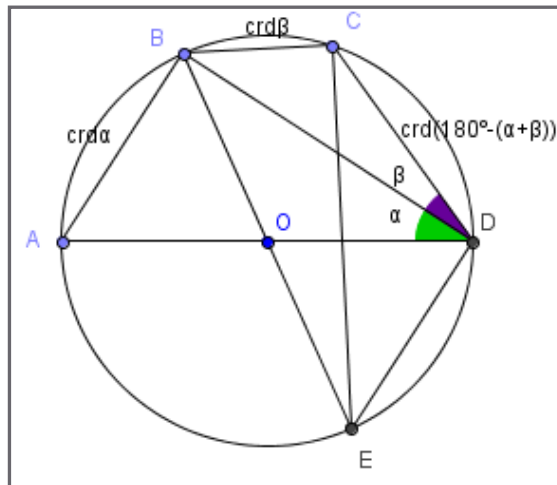


Ilustração 19 - Fórmula da soma de dois arcos

Sejam  $AB$  e  $BC$  as cordas dadas. O objetivo é determinar  $AC$ .

Começamos por desenhar os diâmetros  $AD$  e  $BE$  e unimos os pontos como na figura.

Podemos determinar  $BD$  e  $CE$  pois são as cordas dos suplementares dos arcos dados  $AB$  e  $BC$ , respetivamente.

Pelo critério *LAA* os triângulos  $ADB$  e  $EBD$  são congruentes pois:

- $AD = EB$ , pois são diâmetros;
- $\widehat{ABD} = \widehat{BED} = 90^\circ$ , pois os ângulos estão inscritos numa semicircunferência;
- $\widehat{BAD} = \widehat{BED} = 90^\circ$ , pois os ângulos estão inscritos no arco  $BD$ .

Assim podemos afirmar que  $DE = AB$ .

Aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero  $BCDE$  vem:

$$BD \cdot CE = BC \cdot DE + CD \cdot BE \Leftrightarrow CD \cdot BE = BD \cdot CE - BC \cdot DE.$$

Substituindo  $BE$  por 120 e  $DE$  por  $AB$  obtemos:

$$CD \cdot 120 = BD \cdot CE - BC \cdot AB.$$

Note-se que na igualdade anterior, todos os termos do 2º membro são conhecidos e, por isso, podemos determinar  $CD$  e assim a corda do ângulo suplementar, ou seja,  $AC$ .

Escrevendo  $AB$  como  $crd\alpha$ ,  $BC$  como  $crd\beta$ ,  $BD$  como  $crd(180^\circ - \alpha)$  e  $CE$  como  $crd(180^\circ - \beta)$  vem:

$$120 \cdot crd(180^\circ - (\alpha + \beta)) = crd(180^\circ - \alpha) \cdot crd(180^\circ - \beta) - crd\beta \cdot crd\alpha,$$

o que escrito na notação atual é dado por:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Aplicações da fórmula da soma de dois arcos:

$$- crd\left(3^\circ + 1\frac{1}{2}^\circ\right) = crd\left(4\frac{1}{2}^\circ\right);$$

$$- crd\left(4\frac{1}{2}^\circ + 1\frac{1}{2}^\circ\right) = crd(6^\circ).$$

### 2.3.2.6) Outras fórmulas

Do Teorema de Ptolomeu resultaram ainda as fórmulas que traduzidas na linguagem moderna são:

$$\checkmark \sin(x + y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

Observe-se a Ilustração 20:

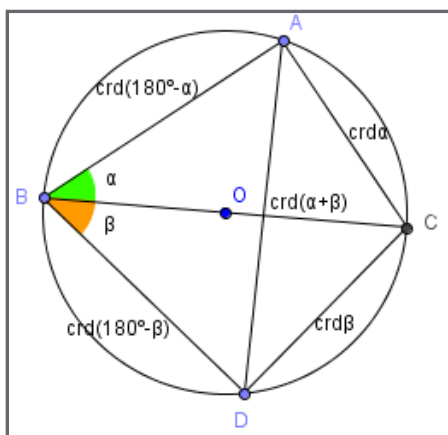


Ilustração 20 - Fórmula do seno da soma

Sejam  $AB$  e  $BD$  as cordas dadas. O objetivo é determinar  $AD$ .

Começamos por desenhar o diâmetro  $BC$  e unimos os pontos como na figura.

Podemos determinar  $AB$  e  $DB$  pois são as cordas dos suplementares dos arcos dados  $AC$  e  $CD$ , respectivamente.

Aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero  $ABCD$  vem:

$$AD \cdot BC = AC \cdot BD + AB \cdot CD.$$

Escrevendo  $AC$  como  $crd\alpha$ ,  $CD$  como  $crd\beta$ ,  $AB$  como  $crd(180^\circ - \alpha)$  e  $BD$  como  $crd(180^\circ - \beta)$ ,

$$crd(\alpha + \beta) \cdot 120 = crd(\alpha) \cdot crd(180^\circ - \beta) - crd(180^\circ - \alpha) \cdot crd\beta,$$

o que escrito na notação atual é dado por:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

$$\checkmark \cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

Observe-se a Ilustração 21:

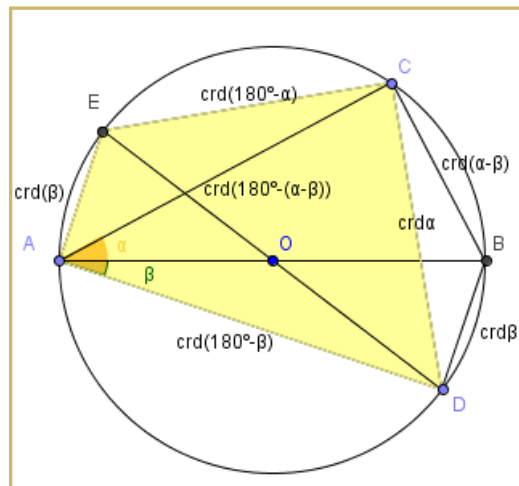


Ilustração 21 - Fórmula do cosseno da diferença

Seja:

- $AB$  um diâmetro da circunferência;
- $CD = crd\alpha$ ;
- $BD = crd\beta$ .

Da figura obtém-se  $BC = crd(\alpha - \beta)$ .

O objetivo é determinar  $AC = crd(180^\circ - (\alpha - \beta))$ .

Aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero  $AECD$  vem:

$$ED \cdot AC = EC \cdot AD + AE \cdot CD \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 120 \cdot crd(180^\circ - (\alpha - \beta)) = crd(180^\circ - \alpha) \cdot crd(180^\circ - \beta) + crd(\beta) \cdot crd(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow crd(180^\circ - (\alpha - \beta)) = \frac{crd(180^\circ - \alpha) \cdot crd(180^\circ - \beta) + crd(\beta) \cdot crd(\alpha)}{120}.$$

Usando a notação atual:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

E com as novas fórmulas surge a possibilidade de Ptolomeu calcular o comprimento de cordas de mais arcos.

### 2.3.2.7) Cálculo da $crd(1^\circ)$

O valor para  $crd(1^\circ)$  que encontramos na tabela de Ptolomeu é 1; 2,50. Ptolomeu prova o teorema, que veremos a seguir, para ter a certeza quanto à exatidão deste valor com duas casas sexagesimais.

#### 1º Passo: Um Teorema

**Teorema 2:** Se forem dadas duas cordas desiguais sendo a corda  $\alpha$  maior que a corda  $\beta$ , então:

$$\frac{crd\alpha}{crd\beta} < \frac{\alpha}{\beta}.$$

(Tal como antes iremos considerar arcos menores que  $180^\circ$ .)

**Demonstração:**

Observe-se a Ilustração 22:

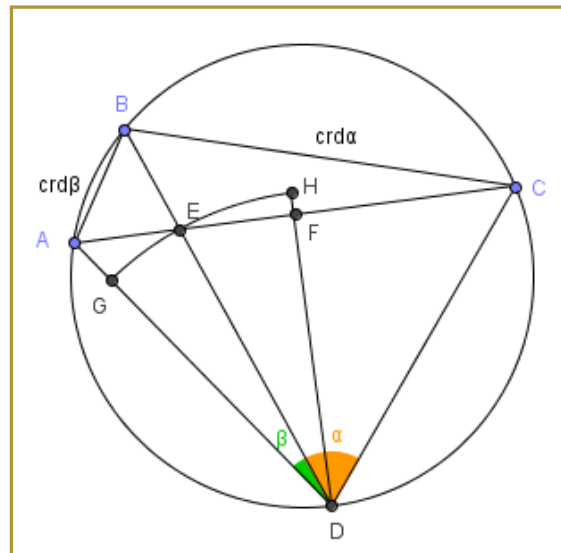


Ilustração 22 - Cálculo da corda de  $1^\circ$

Vamos considerar que os dois arcos são determinados pelas cordas  $AB$  e  $BC$ , onde  $AB < BC$ . Pretendemos provar que:

$$\frac{BC}{AB} < \frac{arcBC}{arcAB}.$$

Começamos por bisetar o ângulo  $ABC$  em  $B$ , e prolongamos  $BE$  ( $E$  em  $AC$ ) até encontrar o círculo em  $D$ . Então temos  $AD = DC$ , pois a ângulos iguais correspondem cordas iguais.

Aplicando ao triângulo  $ABC$  a proposição Euclides VI, 3: o bissetor de um ângulo num triângulo, corta o lado oposto em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes (cuja demonstração segue em Anexo), vem:

$$\frac{AE}{EC} < \frac{AB}{BC}. \text{ 15)}$$

De 15) resulta  $AE < EC$ , pois  $AB < BC$  por hipótese.

Traçamos a partir  $D$  a perpendicular a  $AC$ ,  $DF$ ;  $F$  é o ponto médio de  $AC$ . Agora temos:

$$AD > ED > FD.$$

Traçando o círculo de centro  $D$  e raio  $ED$ , este vai cortar  $AD$  entre  $A$  e  $D$  em  $G$  e  $DF$  (prolongado para além de  $F$ ) em  $H$ . Considerando os sectores  $DEH$  e  $DGE$  obtidos vemos que:

$$\text{setor}DEH > \triangle DEF$$

e

$$\text{setor}DGE < \triangle DEA.$$

Então:

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle DEA} < \frac{\text{setor}DEH}{\text{setor}DGE}. \quad 16)$$

Como os dois triângulos têm a mesma altura,  $DF$ , a razão entre as suas áreas é igual à razão entre as suas bases ou seja:

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle DEA} = \frac{\frac{EF \cdot DF}{2}}{\frac{EA \cdot DF}{2}} = \frac{EF}{EA}. \quad 17)$$

Por outro lado, a razão entre a área dos sectores de um círculo é igual à razão entre os seus ângulos ao centro:

$$\frac{\text{setor}DEH}{\text{setor}DEG} = \frac{\frac{\hat{EDH} \cdot \pi \cdot ED^2}{360^\circ}}{\frac{\hat{EDG} \cdot \pi \cdot ED^2}{360^\circ}} = \frac{\hat{EDH}}{\hat{EDG}}. \quad 18)$$

Substituindo 17) e 18) em 16) obtemos:

$$\frac{EF}{EA} < \frac{\hat{EDH}}{\hat{EDG}}.$$

Adicionando uma unidade a ambos os lados da desigualdade:

$$\frac{EF + EA}{EA} < \frac{\hat{EDH} + \hat{EDG}}{\hat{EDG}} \Leftrightarrow \frac{AF}{EA} < \frac{\hat{GDH}}{\hat{EDG}}.$$

Multiplicando por 2 ambos os lados da desigualdade:

$$\frac{2 \cdot AF}{EA} < \frac{2 \cdot \hat{GDH}}{\hat{EDG}} \Leftrightarrow \frac{AC}{EA} < \frac{\hat{ADC}}{\hat{EDG}}.$$

Tirando uma unidade a ambos os lados da desigualdade:

$$\frac{AC - EA}{EA} < \frac{\hat{ADC} - \hat{EDG}}{\hat{EDG}} \Leftrightarrow \frac{EC}{EA} < \frac{\hat{CDE}}{\hat{EDG}}. \quad 19)$$

Usando 15) e o facto de um ângulo inscrito ser metade da amplitude do arco que o subentende, podemos escrever 19) da seguinte forma:

$$\frac{BC}{AB} < \frac{\text{arc}BC}{\text{arc}AB}.$$

## 2º Passo: A aplicação do Teorema

Usando o *Teorema 2*, vamos determinar  $crd(1^\circ)$ .

Ptolomeu aplica o Teorema a dois casos:

### Caso 1:

$$\alpha = 1\frac{1}{2}^\circ \text{ e } \beta = 1^\circ,$$

$$\frac{crd\left(1\frac{1}{2}^\circ\right)}{crd(1^\circ)} < \frac{1\frac{1}{2}^\circ}{1^\circ} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{crd\left(1\frac{1}{2}^\circ\right)}{crd(1^\circ)} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{crd(1^\circ)}{crd\left(1\frac{1}{2}^\circ\right)} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow crd(1^\circ) > \frac{2}{3} \cdot crd\left(1\frac{1}{2}^\circ\right).$$

Recorrendo à tabela de Ptolomeu obtemos o valor de  $crd\left(1\frac{1}{2}^\circ\right) = 1;34,15$  e então:

$$crd(1^\circ) > \frac{2}{3} \cdot crd\left(1\frac{1}{2}^\circ\right) = \frac{2}{3} \cdot 1;34,15 = 0;40 \cdot 1;34,15 = 1;2,50,10$$

### Caso 2:

$$\alpha = 1^\circ \text{ e } \beta = \frac{3}{4}^\circ,$$

$$\frac{crd(1^\circ)}{crd\left(\frac{3}{4}^\circ\right)} < \frac{1^\circ}{\frac{3}{4}^\circ} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{crd(1^\circ)}{crd\left(\frac{3}{4}^\circ\right)} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow crd(1^\circ) < \frac{4}{3} \cdot crd\left(\frac{3}{4}^\circ\right) = \frac{4}{3} \cdot 0;47,8 = 1;20 \cdot 0;47,8 = 1;20,50,40$$

Do Caso 1 e do Caso 2, resulta:

$$1;2,50,10 < crd(1^\circ) < 1;20,50,40.$$

Ptolomeu conclui desta forma que  $crd(1^\circ) = 1;2,50$ .

Pela fórmula da corda do arco metade  $crd\left(\frac{1}{2}^\circ\right) = 0;31,15$ .

## 2.3.3. A terceira coluna da tabela de Ptolomeu: o seu significado

A terceira coluna da tabela de cordas de Ptolomeu (Ilustração 24), que está identificada com “sixtieths”, dá  $\frac{1}{30}$  do incremento de uma linha para a próxima ou seja:

$$sixth(a_n) = \frac{1}{30} (crd(a_{n+1}) - crd(a_n)).$$

Como a diferença de arco de uma linha para a próxima é metade de um grau, ou 30 minutos do arco, a terceira coluna dá o incremento médio de  $crd\ \alpha$  correspondente a um aumento de um minuto em  $\alpha$ ; ora um minuto é um sessenta avos do grau e daí a designação da coluna. Esta coluna é usada para fazer a interpolação: permite determinar  $crd\ \alpha$  se  $\alpha$  está entre duas entradas da coluna dos arcos.

Assim podemos encontrar  $crd6; 32^\circ$  da seguinte forma:

- começa-se por procurar na tabela o valor mais próximo de  $crd6; 32^\circ$  mas inferior a  $crd6; 32^\circ$

$$crd6\frac{1}{2}^\circ 6; 48, 11;$$

- de seguida obtém-se a diferença entre  $crd6; 32^\circ$  e  $crd6\frac{1}{2}^\circ$  que é  $0; 02^\circ$  (ou seja  $2 \cdot \frac{1}{60}$ );

- na terceira coluna da Tabela de Ptolomeu, procura-se o “sixtieth” correspondente a  $crd6\frac{1}{2}^\circ$  e multiplica-se esse valor pela diferença antes encontrada:

$$2 \cdot (0; 1, 2, 43) = 0; 2, 5, 26;$$

- soma-se o valor de  $crd6\frac{1}{2}^\circ$  a  $2 \cdot (0; 1, 2, 43)$  e obtém-se:

$$crd6; 32^\circ = 6; 50, 16.$$

De notar que a tabela dá uma precisão equivalente a uma tabela moderna de 5 casas decimais.

A Ilustração 23 e a Ilustração 24 foram retiradas de Maor (1998).



Ilustração 23 - Extrato do Almagesto

| Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν |           |           | Table of Chords |           |           |
|-------------------------------|-----------|-----------|-----------------|-----------|-----------|
| περιφ.<br>ρειῶν               | εὐθειῶν   | ἑξήκοστῶν | arcs            | chords    | sixtieths |
| ζ'                            | σ λα κε   | σ α β ν   | 1°              | 0;31,25   | 0;1,2,50  |
| α                             | α β ν     | σ α β ν   | 1°              | 1;2,50    | 0;1,2,50  |
| αζ'                           | α λδ ιε   | σ α β ν   | 1½°             | 1;34,15   | 0;1,2,50  |
| β                             | β ε μ     | σ α β ν   | 2°              | 2;5,40    | 0;1,2,50  |
| βζ'                           | β λς δ    | σ α β μη  | 2½°             | 2;37,4    | 0;1,2,48  |
| γ                             | γ η κη    | σ α β μη  | 3°              | 3;8,28    | 0;1,2,48  |
| γζ'                           | γ λθ νβ   | σ α β μη  | 3½°             | 3;39,52   | 0;1,2,48  |
| δ                             | δ ια ις   | σ α β μς  | 4°              | 4;11,16   | 0;1,2,47  |
| δζ'                           | δ μβ μ    | σ α β μς  | 4½°             | 4;42,40   | 0;1,2,47  |
| ε                             | ε ιδ δ    | σ α β μς  | 5°              | 5;14,4    | 0;1,2,46  |
| εζ'                           | ε με κς   | σ α β με  | 5½°             | 5;45,27   | 0;1,2,45  |
| ς                             | ς ις μθ   | σ α β μδ  | 6°              | 6;16,49   | 0;1,2,44  |
| ςζ'                           | ς μη ια   | σ α β μγ  | 6½°             | 6;48,11   | 0;1,2,43  |
| τ                             | τ ιθ λγ   | σ α β μβ  | 7°              | 7;19,33   | 0;1,2,42  |
| τζ'                           | τ ν νδ    | σ α β μα  | 7½°             | 7;50,54   | 0;1,2,41  |
| ·                             | ·         | ·         | ·               | ·         | ·         |
| ροδζ'                         | ριθ να μγ | σ σ β νγ  | 174½°           | 119;51,43 | 0;0,2,53  |
| ροε                           | ριθ νγ ι  | σ σ β λς  | 175°            | 119;53,10 | 0;0,2,36  |
| ροεζ'                         | ριθ νδ κς | σ σ β κ   | 175½°           | 119;54,27 | 0;0,2,20  |
| ρος                           | ριθ νε λη | σ σ β γ   | 176°            | 119;55,38 | 0;0,2,3   |
| ροςζ'                         | ριθ νς λθ | σ σ α μς  | 176½°           | 119;56,39 | 0;0,1,47  |
| ρος                           | ριθ νς λβ | σ σ α λ   | 177°            | 119;57,32 | 0;0,1,30  |
| ροςζ'                         | ριθ νη ιη | σ σ α ιδ  | 177½°           | 119;58,18 | 0;0,1,14  |
| ροη                           | ριθ νη νε | σ σ σ νς  | 178°            | 119;58,55 | 0;0,0,57  |
| ροηζ'                         | ριθ νθ κδ | σ σ σ μα  | 178½°           | 119;59,24 | 0;0,0,41  |
| ροθ                           | ριθ νθ μδ | σ σ σ κε  | 179°            | 119;59,44 | 0;0,0,25  |
| ροθζ'                         | ριθ νθ νς | σ σ σ θ   | 179½°           | 119;59,56 | 0;0,0,9   |
| ρπ                            | ρκ σ σ    | σ σ σ σ   | 180°            | 120;0,0   | 0;0,0,0   |

Ilustração 24 - Almagesto de Ptolomeu: Tabela de Cordas

### 2.3.4. Verificação do Teorema que permite obter $crd(1^\circ)$

Animando o seletor, dois pontos,  $B$  e  $C$ , irão percorrer a circunferência gerando duas cordas,  $AB$  e  $BC$ , sendo  $AB < BC$ . Na folha de cálculo ficam registados os valores dos ângulos inscritos  $\alpha$  e  $\beta$ , correspondentes às cordas  $BC$  e  $AB$ , respetivamente, e o comprimento destas cordas. São calculadas as razões entre os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  e entre as cordas  $BC$  e  $AB$ . Linha a linha, o Teorema 2 é verificado.

A hiperligação é: [Ptolomeu\\_Corda1.ggb](#)

No Anexo a este trabalho encontra-se um *print screen* do ficheiro.



### 2.3.5. Construção da tabela de uma tabela de cordas com as fórmulas de Ptolomeu usando o GeoGebra

A animação do seletor irá produzir uma tabela onde ficam registados os valores do ângulo ao centro, do seu suplementar e da sua metade. Simultaneamente, são medidas as cordas correspondentes ao ângulo suplementar e ao ângulo metade. Os valores destas cordas são comparados com os valores obtidos com as fórmulas de Ptolomeu. Como ficam registados os valores destas cordas, o mesmo é dizer que a tabela de Ptolomeu é naturalmente gerada.

A hiperligação para esta animação é: [Ptolomeu\\_tabela.ggb](#)

No Anexo a este trabalho encontra-se um *print screen* do ficheiro.

### 2.3.6. Comparação entre os valores de seno de Ptolomeu e os valores de seno atuais

Usando a animação anterior, são colocados na tabela os ângulos  $\alpha$  e os respetivos ângulos metade  $\beta$ .

Partindo da definição  $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\overline{AB}}{2r}$ , que nos permite passar das cordas para os valores de seno, é gerada uma coluna com os valores de seno  $\beta$  de Ptolomeu. Na coluna seguinte foram colocados os valores atuais de seno de  $\beta$ .

Qual seria o grau de precisão dos valores obtidos pelas fórmulas de Ptolomeu? A resposta é surpreendente!

Na última coluna desta animação são calculadas as diferenças entre os valores de seno de Ptolomeu e os valores de seno atuais. Tivemos de ir até aos 15 algarismos significativos para observar estas diferenças (15 algarismos significativos é a maior precisão possível dada pelo GeoGebra). Há valores onde apenas a partir da 16ª casa decimal se observam diferenças!

A hiperligação para esta animação é: [Ptolomeu\\_seno.ggb](#)

No Anexo a este trabalho encontra-se um *print screen* do ficheiro.

### 2.3.7 Regressão sinusoidal e polinomial a partir de alguns valores da tabela de Ptolomeu usando o GeoGebra

Partindo dos 23 ângulos da tabela de Ptolomeu ( $\theta$ ) e dos quocientes entre as respetivas cordas e 120  $\left(\frac{crd(\theta)}{120}\right)$ , obteve-se o valor de  $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .

Num referencial cartesiano foram marcados os pares ordenados  $\left(\theta, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ .

De seguida, foi feita regressão polinomial e sinusoidal sobre este conjunto de pontos. Depois aparecem as funções diferença:  $d_1$  como a diferença entre a função seno e a função polinomial e  $d_2$  como a diferença entre a função seno e a função sinusoidal. Qual destas funções aproximará melhor os valores de Ptolomeu?

A hiperligação para estes pares ordenados, para as regressões e para as funções diferença é: [Ptolomeu\\_regressao.ggb](http://Ptolomeu_regressao.ggb)

No Anexo a este trabalho encontra-se um *print screen* do ficheiro.

## 2.3.8 Aplicação da tabela de cordas na Astronomia

### 2.3.8.1) Palavras-chave

A fonte é o Site Web A eclíptica.

Há mais de 2000 anos, os astrónomos egípcios e gregos, ao observarem o céu noturno, aperceberam-se de que havia conjuntos de estrelas, as constelações, que mantinham aproximadamente as mesmas posições relativas.

Então imaginaram que o Universo era uma esfera enorme com estrelas fixas e chamaram-lhe Esfera Celeste e ao conjunto de todas as estrelas fixas, firmamento. Hoje sabemos que não é assim. As estrelas do firmamento movem-se, mas estão tão longe que é muito difícil observar o seu movimento, mesmo com os telescópios mais poderosos.

Como a Terra se encontra no centro da Esfera Celeste, de 24 em 24 horas, aproximadamente, vêem-se as estrelas na mesma posição do firmamento. E o que se passa em relação ao Sol?

Se marcarmos sobre a Esfera Celeste a posição do Sol ao meio-dia durante um ano, ele vai descrever uma circunferência cuja inclinação é de  $23^{\circ}30'$  em relação ao equador da Esfera Celeste. Esta órbita aparente do Sol na Esfera Celeste chama-se eclítica. A inclinação da eclítica é igual à inclinação do eixo Polo Norte-Polo Sul em relação ao plano da órbita da Terra.

### 2.3.8.2) O modelo solar de Hiparco

A fonte é o Site Web The Sun in the Church (2001).

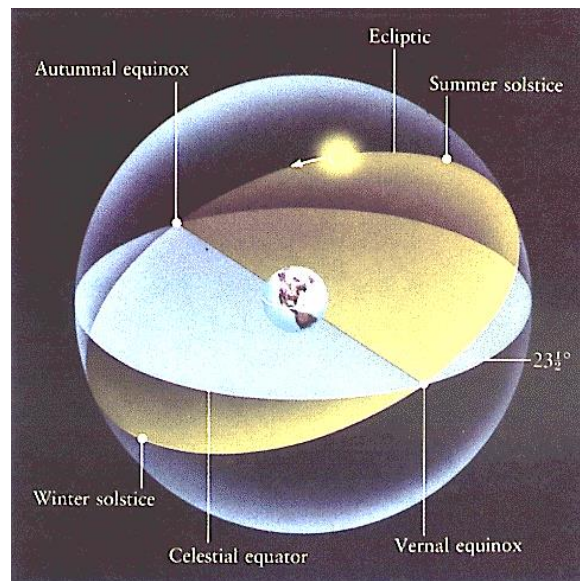


Ilustração 25 - Eclítica<sup>4</sup>

Para observar uma aplicação da tabela de cordas à trigonometria plana temos de, antes, analisar a introdução de Hiparco ao modelo solar no Livro III.

Os astrónomos gregos acreditavam que as órbitas dos planetas e dos objetos celestes iluminados da astronomia deveriam ser círculos ou partes de círculos. A maneira, mais simples, de representar o movimento aparente do Sol observado a partir da Terra (*T*) seria um círculo no plano da eclíptica, centrado em *T*. Podemos observar isto na Ilustração 26 e na Ilustração 27.

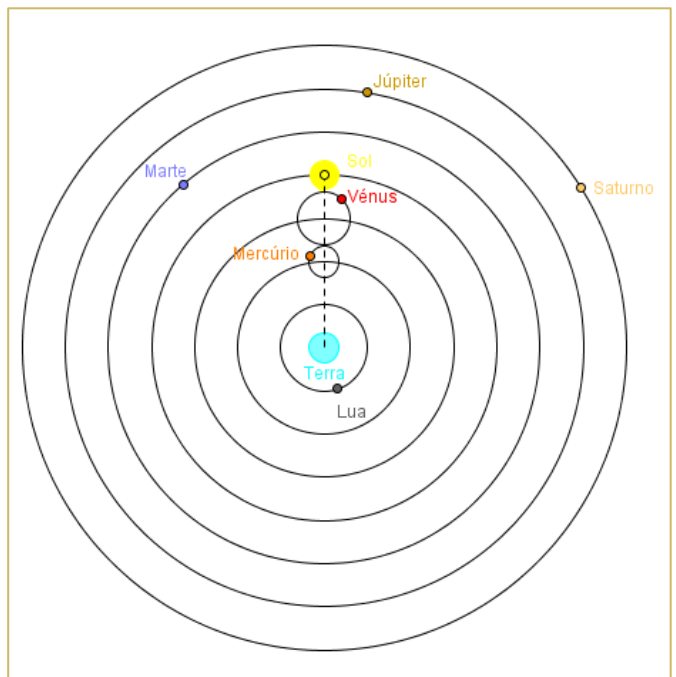


Ilustração 26 – Órbitas dos Planetas e dos objetos celestes iluminados, segundo os gregos

<sup>4</sup> Fonte: < <http://www.astronomy.robshare.com/wp-content/uploads/2010/09/cel-sphere-2.gif> >  
25/01/2013

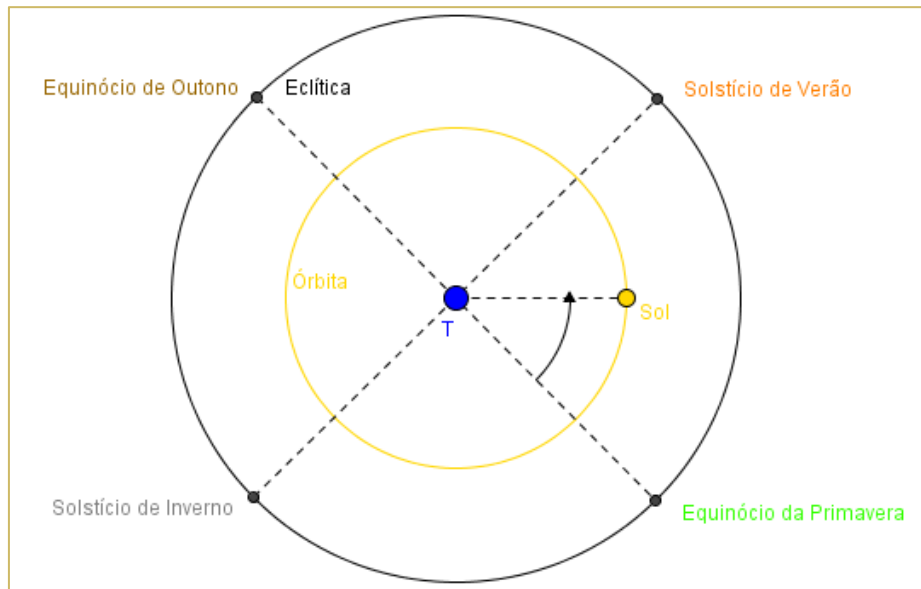


Ilustração 27 - Movimento aparente do Sol observado a partir da Terra, segundo os gregos

Os solstícios e equinócios estão localizados a  $90^\circ$  quando vistos da Terra. Se tomarmos  $y$  como sendo o número de dias do ano, espera-se que os intervalos entre as estações fossem exatamente  $\frac{y}{4}$  dias.

Mas uma observação dos fatos mostra-nos outra coisa: as estações não são iguais. Em particular Hiparco encontrou que o Sol se move  $90^\circ$  na eclíptica do equinócio da primavera ao solstício de verão em  $94 \frac{1}{2}$  dias e  $90^\circ$  do solstício de verão ao equinócio de outono em  $92 \frac{1}{2}$  dias. Por esta razão a Terra foi retirada do centro da órbita do Sol.

Na Ilustração 28 é dado o modelo solar de Hiparco.

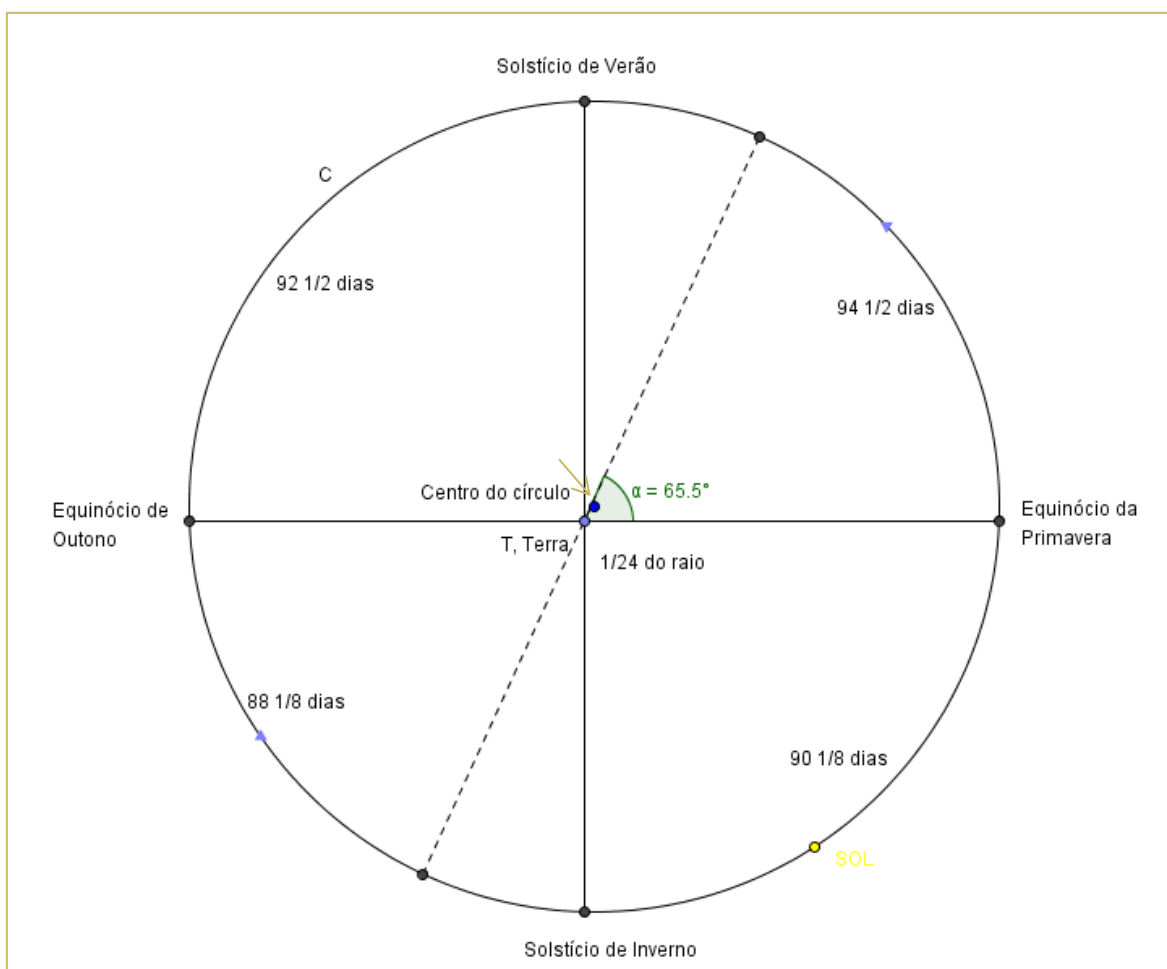


Ilustração 28 - Modelo Solar de Hiparco

A Terra está em  $T$ , parada, enquanto o Sol se move à volta do círculo  $C$  num movimento angular uniforme. O círculo onde o Sol se move diz-se excêntrico à Terra. Para gerar intervalos mais longos entre o solstício e o equinócio, a Terra teve de ser retirada do centro para a direção oposta para que os arcos que lhe correspondem, vistos da Terra, fossem cada um maiores que  $\frac{1}{4}$  do círculo e demorassem mais que  $\frac{y}{4}$  dias a atravessá-los.

### 2.3.8.3) Obtenção da excentricidade do Sol

A fonte é Sidoli (2004) e Van Brummelen, *The Mathematics of the heavens and the earth* (2009). Por sua vez estes autores têm como referência a tradução do *Almagesto* de Toomer.

A primeira aplicação de Ptolomeu da tabela de cordas a um problema plano é a obtenção dos parâmetros do modelo solar de Hiparco no *Almagesto III*, 4. A obtenção dos parâmetros do modelo solar de Hiparco é representativo de um tipo de problema matemático que mostra a razão da invenção das tabelas de cordas.

Vamos considerar que o Sol se move uniformemente num círculo que não está centrado na Terra (modelo excêntrico). O objetivo de Hiparco é colocar a Terra no interior deste círculo mantendo todas as mudanças na velocidade do Sol. A solução de Hiparco está perdida mas Ptolomeu apresenta-a no *Almagesto III, 4*.

Observe-se a Ilustração 29:

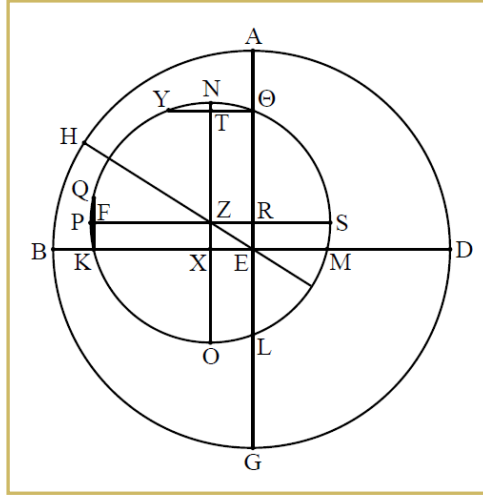


Ilustração 29 - Obtenção da excentricidade do Sol, Ptolomeu

O Sol atravessa o círculo  $\Theta KLM$  em movimento uniforme sendo que para o  $arc\Theta K$  demora  $94\frac{1}{2}$  dias e para  $arcKL$  demora  $92\frac{1}{2}$  dias. De seguida obtemos, em notação sexagesimal:

$$- arc\Theta K = \frac{94\frac{1}{2} dias \cdot 360}{365\frac{1}{4}} = 93;9^{\circ}$$

$$- arcKL = \frac{92\frac{1}{2} dias \cdot 360}{365\frac{1}{4}} = 91;11^{\circ}$$

Logo  $arc\Theta KL = 184;20^{\circ}$ .

Depois  $arc\Theta KL - arcNPO = 184;20^{\circ} - 180^{\circ} = 4;20^{\circ} = arcN\Theta + arcOL$ .

Na Ilustração 29,  $FZ$ ,  $KM$  e  $Y\Theta$  são paralelos e são perpendiculares a  $NO$ ,  $OL$  e  $QK$ . Pela Proposição *Elementos III,3* (cuja demonstração está no Anexo),  $ON$  bissecta  $Y\Theta$ . Então:

$$arc\Theta NY = arc2\Theta N = 4;20^{\circ}.$$

Ptolomeu, usando a sua tabela de cordas, obtém:

$$\Theta Y = crd\Theta NY \approx 4;32^p \text{ e } EX = \Theta T = \frac{1}{2}\Theta Y = 2;16^p.$$

Note-se que o diâmetro do ex-centro (o círculo da órbita do Sol) é  $120^p$ . Note-se, também, que a notação  $^p$  representa as partes da unidade de distância.

Como  $\text{arc} \angle NPQ = 93;9^\circ$ ,  $\text{arc} \angle N = 2;10^\circ$  e  $\angle NP = 90^\circ$  por subtração vem:

$$\text{arc} \angle PK = 93;9^\circ - 90^\circ - 2;10^\circ = 0;59^\circ \text{ e } \text{arc} \angle KQ = 2\text{arc} \angle PK = 1;58^\circ.$$

Ptolomeu, usando a sua tabela de cordas, obtém:

$$KFQ = \text{crd} \angle KPQ \approx 2;4^p \text{ e } ZX = FK = \frac{1}{2} KFQ = 1;2^p.$$

Estas primeiras aplicações da tabela de cordas não são trigonométricas, pois nenhum triângulo está a ser medido. Mas o objetivo é medir o triângulo  $ZXE$ .

Usando o Teorema de Pitágoras, vem:

$$EZ^2 = ZX^2 + XE^2, \text{ donde } EZ \approx 2;29\frac{1}{2}^p \text{ (onde o raio da circunferência de centro } Z \text{ é } 60^p).$$

Por fim:

$$\frac{60}{2;29\frac{1}{2}^p} \approx 24,$$

ou seja o raio do ex-centro (circunferência de centro  $Z$ ) é aproximadamente 24 vezes a distância entre os centros  $Z$  e  $E$ .

Durante seis séculos, o *Almagesto*, representou a mais importante fonte de consulta para os astrónomos de todo o mundo. Porém no século *VIII* os cientistas voltariam a sua atenção para as obras trigonométricas de um povo, que sempre surpreendera o mundo com sua Matemática original e criativa, os indianos.

### 2.3.9. Um problema

1. A partir do valor de  $\text{crd}(1^\circ)$  de Ptolomeu, ou seja  $\text{crd}(1^\circ) = 1;2,50$ , determina o perímetro de um polígono inscrito de 360 lados e assim a aproximação sexagesimal de  $\pi$ .
2. Converte o valor obtido anteriormente em decimal e compara-o com o valor de  $\pi$  atualmente usado e com a aproximação de Arquimedes:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

O valor de Ptolomeu para  $\text{crd}(1^\circ)$  é muito grande ou muito pequeno?

## Resolução

$$1. \quad P_{\text{poligono de 360 lados}} = 360 \cdot 1;2,50 = 6,0;0 \cdot 1;2,50 = 6,17;0 = P_{\text{circunferência}}$$

$$\pi = \frac{P_{\text{circunferência}}}{\text{diâmetro}} = \frac{6,17;0}{120} = \frac{6,17;0}{2,0;0} = 3;8,30$$

$$2. \quad \pi = 3;8,30 = 3,14166666 \dots$$

Na expansão decimal de  $\pi$  por nós conhecida  $\pi = 3,14159 \dots$

Assim neste caso o valor de  $\pi$  de Ptolomeu é um pouco maior que o valor que nós utilizamos.

Escrevendo as expansões decimais das frações apresentadas por Arquimedes:

$$3,14084 \dots < \pi < 3,14285 \dots$$

Comparando o valor de Ptolomeu com o de Arquimedes, o valor de Ptolomeu está mais próximo do valor que, atualmente, usamos para  $\pi$ .





## Capítulo 3 – Trigonometria na Índia

Neste capítulo, observam-se algumas das inovações que os indianos trouxeram à Trigonometria plana e que não passaram, apenas, pelas tabelas de semicordas ou pela influência na origem de palavra seno.

Por trás das muitas inovações encontram-se vários astrónomos e matemáticos. Para este trabalho escolheram-se aqueles que produziram materiais inovadores e bastante sofisticados para a época, criando uma distância bastante significativa dos Gregos.

Começamos por introduzir a linguagem trigonométrica usada na antiga Índia.

De seguida, passamos à obra *Āryabathīya* de Āryabhata, que é a mais antiga da matemática e da astronomia indianas com um autor identificável. Aí encontra-se uma tabela de semicordas. Observamos como a tabela, aí apresentada, é obtida e comparamos os valores obtidos com os atuais.

Bhaskara I é astrónomo/matemático seguinte. Bhaskara I consegue escrever o seno como razão entre funções quadráticas e, assim, obter uma aproximação real do seno. Estariam os valores que obteve muito longe dos atuais? Irá tentar-se responder a esta questão.

O terceiro matemático escolhido foi Brahmagupta. Brahmagupta escreveu a obra *Khanda Khadyaka* cuja tradução iria, em parte, dar a conhecer aos Árabes e ao Ocidente a astronomia e a matemática indiana. Apesar de essa não ser a sua obra mais importante, é nela que se encontra uma fórmula de interpolação que lhe permitiria a partir de, apenas, seis entradas o cálculo do seno de qualquer arco.

O último matemático em destaque é Madhava com o qual se abordam as séries de potências para o seno e o cosseno construídas no século *XIV*. Lembre-se que as séries de potências, apenas, surgem na Europa no século *XVII*.

Este capítulo encerra com uma aplicação do trabalho com senos e cossenos às equações planetárias, não sem antes observar a influência dos indianos nas palavras seno e cosseno.

### 3.1. A Grécia chega à Índia

A fonte é Katz (2010).

Durante os primeiros séculos da era cristã, no período do império Kushan e dos Guptas, há testemunhos evidentes da transmissão de conhecimento astronómico grego para a Índia, provavelmente através das vias comerciais romanas. Curiosamente, não foi a astronomia e a matemática de Ptolomeu que foram transmitidas, mas antes a obra dos seus predecessores como Hiparco. Tal como as necessidades da astronomia grega levaram ao desenvolvimento da trigonometria, as necessidades da astronomia indiana levaram a desenvolvimentos progressivos neste campo.

### 3.2. O início da trigonometria indiana e o *Āryabathīya* de Āryabhata (476-550)

A obra indiana mais antiga conhecida e que inclui trigonometria é o *Paitāmahasiddhānta* escrito no princípio do século V. Esta é a mais antiga entre várias obras semelhantes que tratavam de astronomia e da matemática associada.

Para sustentar os cálculos de trigonometria esférica para resolver problemas astronômicos, o *Paitāmahasiddhānta* contém uma tabela de semicordas. Semicorda é a tradução literal do termo sânscrito *jiā-ardha*. Lembramos que Ptolomeu, para resolver triângulos usando uma tabela de cordas, muitas vezes tinha de considerar metade da corda do dobro do ângulo. E foi, provavelmente, um matemático indiano desconhecido que decidiu que seria muito mais prático tabelar as semicordas do ângulo duplo em vez das próprias cordas. Assim neste trabalho, como em todas as obras indianas seguintes, é a função da semicorda que é utilizada.

Ptolomeu tabelava as suas cordas num círculo de raio 60, enquanto Hiparco, vários séculos antes, usava o raio de 3438. Devido ao uso do raio 3438 no *Paitāmahasiddhānta* pensa-se que foi a trigonometria de Hiparco e não a de Ptolomeu que chegou primeiro à Índia.

Vamos seguir os métodos de construção de uma tabela de senos não a partir de *Paitāmahasiddhānta*, por estar conservado imperfeitamente, mas a partir de uma obra mais tardia, o *Āryabathīya* de Āryabhata.

Esta obra é a mais antiga da matemática e a da astronomia indianas com um autor identificável. Pouco se sabe acerca do autor: escreveu o livro em 499 em Kusumapura, perto da capital gupta de Pāṭalipura (a Ptana moderna) nas margens do Ganges, em Bihar, ao norte da Índia.

O *Āryabathīya* é um pequeno livro de quatro secções e 123 estrofes, tratando a segunda seção de 33 estrofes, de matemática. Não é um manual pormenorizado mas antes uma obra descritiva breve que se pensa ser destinada a ser memorizada, com a intenção de ser o sumário de um tratado mais pormenorizado ou de lições dadas pelo autor.

Como os versos podem ser interpretados de diferentes maneiras, controvérsias resultam necessariamente.



Ilustração 30 - Āryabhata<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Fonte: < <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Aryabhata.jpeg> > 5/01/2013

### 3.2.1. A palavra Trigonometria na Índia

A fonte é Datta & Singh (1983).

O nome indiano para Trigonometria é *Jyotpatti-ganita* ou “A ciência do cálculo da construção do seno”. Esta designação é encontrada na obra de Brahmagupta no seu *Brāhma-sphuta-siddhānta*. Por vezes o nome é abreviado para *Jyā-ganita* (ou “A ciência do cálculo dos senos”). Mais recentemente, apareceu com o nome *Trikonamiti*, por aproximação literal e fonética ao nome Grego.

### 3.2.2. A linguagem usada

Uma inovação do trabalho indiano foi o trabalho com as cordas metade, a que já nos referimos atrás. Eles chamaram a esta função *ardha-jyā* que literalmente significa corda metade. Com o tempo este termo foi encurtado para *jyā* e *jiva*.

Considere-se a Ilustração 31:

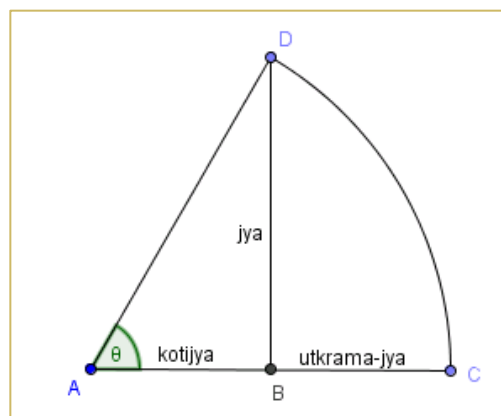


Ilustração 31 - Linguagem indiana

Como a corda, a *jyā*, foi definida como o comprimento de um certo segmento de reta num círculo. Na Ilustração 31, o arco *CD* corresponde a  $\theta$  e *BD* é *jyā*. Assim a relação entre *jyā* e o seno moderno é:

$$jyā(\theta) = R \sin \theta,$$

onde *R* é o raio do círculo.

O *kotijyā*, ou cosseno, é o comprimento *AB* da figura.

O seno reverso é dado por  $vers\theta = 1 - \cos \theta$ .

### 3.2.3. A construção da tabela de R-senos por Āryabhaṭa

A tabela de R-senos é dada em incrementos de  $3\frac{3}{4}^\circ$  para ângulos compreendidos entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . O valor  $3\frac{3}{4}^\circ$  corresponde à divisão da circunferência em 24 partes.

A tabela de diferenças para os R-senos é dada em I, 10 do Āryabhaṭīya.

**Estrofe I, 10** – As vinte e quatro [diferenças] dos senos calculadas em minutos são: 225, 224, 222, 219, 215, 210, 205, 199, 191, 183, 174, 164, 154, 143, 131, 119, 106, 93, 79, 65, 51, 37, 22, 7.

Vamos designar as diferenças por  $d_1, d_2, \dots, d_{24}$ , e as suas somas por  $R_1 = d_1$ ,  $R_2 = d_1 + d_2$ , ...,  $R_{24} = d_1 + d_2 + \dots + d_{24}$ . As somas são os senos dos vários ângulos.

A primeira entrada,  $d_1 = 225$ , dá  $R_1 = 225 = 3438 \cdot \sin 3^\circ 45'$ .

Adicionando à primeira entrada a segunda,  $d_2 = 224$ , obtemos  $R_2 = d_1 + d_2 = 225 + 224 = 449 = 3438 \cdot \sin 7^\circ 30'$ .

Adicionando a terceira entrada que é  $d_3 = 222$ , obtemos  $R_3 = d_1 + d_2 + d_3 = 225 + 224 + 222 = 671 = 3438 \cdot \sin 11^\circ 15'$  e por aí adiante.

Assim memorizando a Estrofe, podemos construir a tabela de senos fazendo  $R_n = R_{n-1} + d_n$ .

### 3.2.4. O método geométrico para calcular os R-senos

O método geométrico para calcular os R-senos, que tinha por base a tabela com as 24 diferenças de R-seno em intervalos de  $225'$ , é apresentada na Estrofe 11 da secção II de forma muito concisa.

**Estrofe II, 11** – Divide o quadrante da circunferência de um círculo de tal forma que os triângulos [retângulos] e quadriláteros irão produzir tantos R-senos como pretendido para qualquer raio.

Vejamos a interpretação desta estrofe feita por comentadores de Āryabhaṭa como Suryadeva e Paramesvara. A fonte é o trabalho de Datta & Singh (1983).

Considere-se a Ilustração 32:

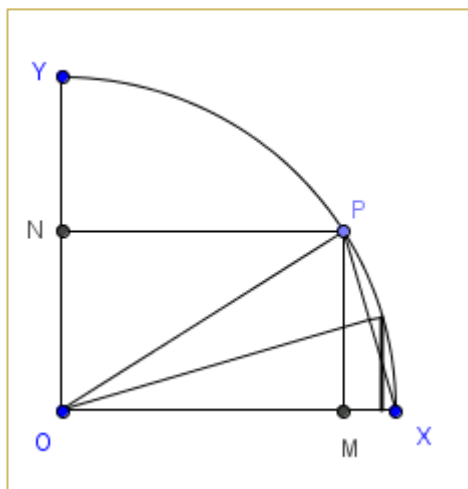


Ilustração 32 – Método geométrico para os R-senos, I

Seja  $P$  um ponto qualquer do quadrante. Desenhem-se as perpendiculares  $PM$  e  $PN$  e una-se  $P$  a  $X$ . Assim  $P$  corresponde com o retângulo  $PMON$  e o triângulo retângulo  $PMX$ . Sendo dado o R-seno do arco  $XP (= \alpha)$ ,  $PM$ , podemos determinar no retângulo  $PMON$  o lado  $PN$ , que é o seno do arco  $(90^\circ - \alpha)$ . Tendo encontrado  $PN$ , podemos calcular  $MX$ , que é igual a  $R - jy\bar{a}(90^\circ - \alpha)$ . No triângulo retângulo  $PMX$  podemos agora calcular a corda  $PX$ . Metade do segmento  $PX$  é  $jy\bar{a} \frac{\alpha}{2}$ .

De seguida consideremos o arco  $\frac{\alpha}{2}$ . De novo a partir um retângulo e de um triângulo retângulo correspondentes ao arco metade, podemos obter  $jy\bar{a}(90^\circ - \frac{\alpha}{2})$  e  $jy\bar{a} \frac{\alpha}{4}$ .

Prosseguindo desta forma podemos calcular os R-senos que quisermos e ao fazê-lo o quadrante ficará dividido num sistema de triângulos retângulos e retângulos, como diz a regra.

*Porque é que este método funciona?*

Vejamos a Ilustração 33:

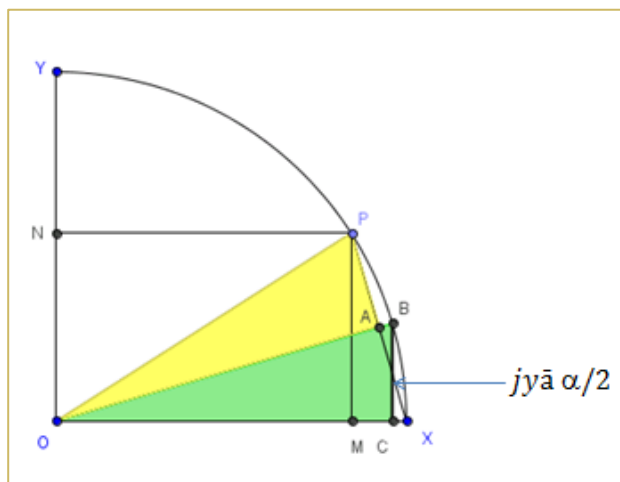


Ilustração 33 - Método geométrico para os R-senos, II

Temos de mostrar que  $\frac{1}{2}PX = BC$ .

Vejamos que os triângulos  $OPA$  e  $OBC$  são geometricamente iguais usando o critério  $LAL$ .

- $OP = OB$  porque são raios;
- $\widehat{POA} = \widehat{BOC}$ , pois  $PA = AX$  por construção e num triângulo a lados iguais correspondem ângulos iguais;
- Por outro lado,  $\widehat{BCO} = 90^\circ$ , por construção.  $\widehat{PAO} = 90^\circ$  pois, como  $PA = AX$ ,  $OA$  é perpendicular a  $PX$  e logo a  $PA$ . Consequentemente  $\widehat{OPA} = \widehat{OBC}$ .

Assim, os triângulos  $OPA$  e  $OBC$  são geometricamente iguais, donde resulta que  $PA = BC$ .

### 3.2.5. Descrição do cálculo das 24 diferenças por Āryabhata

A descrição do método de construção das vinte e quatro diferenças,  $d_n$ , é dado na estrofe 12 da II secção do *Āryabathīya*.

**Estrofe II,12** - Por que número o último seno [diferença] é menor que o primeiro seno, e pelo quociente obtido dividindo a soma do seno precedente [diferenças] pelo primeiro seno, pela soma destas duas quantidades, o seguinte seno [diferenças] é menor do que o primeiro seno.

Joseph (2009) apresenta algumas das interpretações desta estrofe que foram feitas ao longo da história:

- i) Interpretação do comentador Suryadeva e outros:

$$d_2 = R_1 - \frac{R_1}{R_1}$$

$$d_{n+1} = R_1 - \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_n}{R_1}$$

- ii) Interpretação do matemático Paramesvara:

$$d_{n+1} = d_n - \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{R_1}$$

- iii) Interpretação do matemático Nilakantha:

$$d_{n+1} = d_n - \frac{R_n}{R_1} (d_1 - d_2) \text{ 20)$$

iv) *Interpretação do comentador da obra Suryasiddhanta, Ranagatha:*

$$R_{n+1} = R_n + R_1 - \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_n}{R_1}$$

As interpretações apresentadas são todas equivalentes.

Vamos seguir a mais recente interpretação publicada, que se deve a Hayashi em 1997, e que se encontra em Van Brummelen, *The mathematics of the heavens and the earth* (2009). Esta interpretação vem com a sua própria tradução da passagem crucial. Baseia-se na explicação dos finais do século XV do cientista indiano Nīlakanta, que acompanha os cálculos com uma demonstração geométrica.

*“Quando a segunda [corda] metade obtida é menor que a primeira corda metade, que é [aproximadamente igual] ao arco [correspondente], por uma certa quantidade, as restantes [seno-diferenças] são menores [que as anteriores] cada uma por aquela quantidade dividida pela primeira corda.” – Hayashi, 1997.*

#### **Demonstração:**

Começamos por dividir um ângulo reto em 24 partes. Consideramos  $\sin(1^\circ) = R\sin(3^\circ 45')$ .

Escrevemos as primeiras diferenças de senos como  $d_i = R_i - R_{i-1}$ .

Na Ilustração 34, as 24 divisões do quadrante vão ser designadas por  $A_i$  e os pontos médios irão ser apelidados de  $B_i$ . A figura não está à escala para se poderem ver todos os pontos, segmentos e ângulos a que nos referimos. Por outro lado as propriedades que iremos ver são válidas para qualquer número de divisões da circunferência.

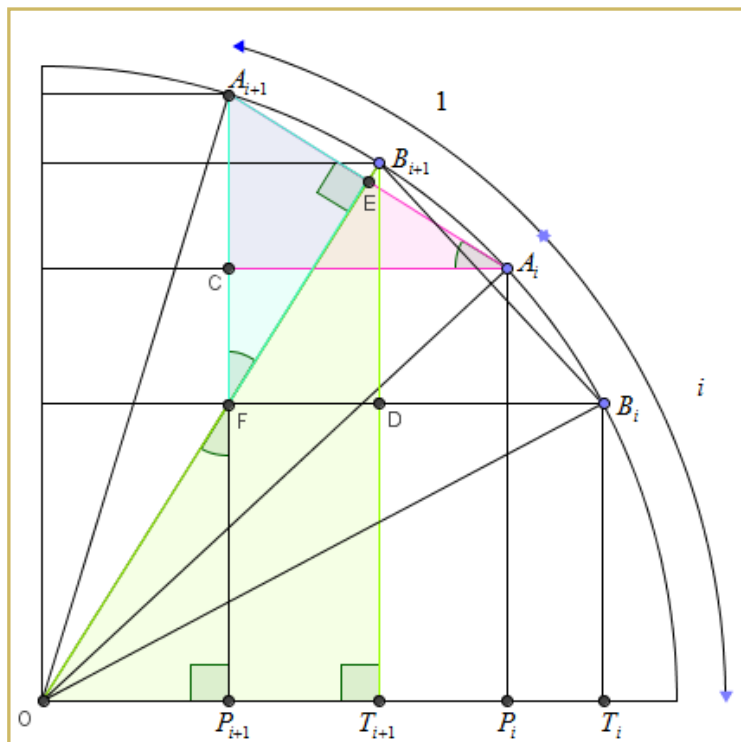


Ilustração 34 - Método para o cálculo das 24 diferenças



Āryabhata procura os comprimentos  $P_i A_i$ . As distâncias  $A_i A_{i+1} = B_i B_{i+1}$  vão ser todas iguais a  $Crd(1)$ .

Mostremos que  $\Delta O B_{i+1} T_{i+1}$  é semelhante a  $\Delta A_{i+1} A_i C$ .

*Primeiro passo:*  $\Delta O F P_{i+1}$  é semelhante a  $\Delta O B_{i+1} T_{i+1}$  pelo critério AA:

- o ângulo  $\angle F O P_{i+1}$  é comum aos dois triângulos;
- por construção, ambos os triângulos são retângulos.

*Segundo passo:*  $\Delta O F P_{i+1}$  é semelhante a  $\Delta A_{i+1} F E$  pelo critério AA:

- $\angle \widehat{O F P_{i+1}} = \angle \widehat{A_{i+1} F E}$ , porque são ângulos verticalmente opostos;
- $\angle \widehat{O P_{i+1} F} = \angle \widehat{A_{i+1} E F} = 90^\circ$  pois:
  - $\angle \widehat{O P_{i+1} F} = 90^\circ$  por construção;
  - Quanto a  $\angle \widehat{A_{i+1} E F}$ , a explicação é que se segue: como  $B_{i+1}$  é ponto médio do arco  $A_{i+1} A_i$  e como a arcos iguais correspondem cordas iguais,  $A_{i+1} B_{i+1} = B_{i+1} A_i$ . Logo  $B_{i+1}$  está sobre a mediatriz de  $A_{i+1} A_i$ . Como  $A_{i+1} O = A_i O$  então  $O$  está sobre a mediatriz de  $A_{i+1} A_i$ . Assim  $B_{i+1} O$  é a mediatriz de  $A_{i+1} A_i$ . Logo  $B_{i+1} O$  é perpendicular a  $A_{i+1} A_i$  por definição. Seja  $E$  o ponto de interseção da mediatriz  $B_{i+1} O$  com  $A_{i+1} A_i$ . Assim o  $\Delta F E A_{i+1}$  é retângulo em  $E$ .

*Terceiro passo:*  $\Delta A_{i+1} C A_i$  é semelhante a  $\Delta A_{i+1} E F$  pelo critério AA:

- $\angle \widehat{A_i C A_{i+1}} = 90^\circ$  por construção e, assim,  $\angle \widehat{A_i C A_{i+1}} = \angle \widehat{F E A_{i+1}} = 90^\circ$ ;
- Se  $\angle \widehat{A_{i+1} F E} = \alpha$  então  $\angle \widehat{F A_{i+1} E} = 90^\circ - \alpha$  e  $\angle \widehat{A_{i+1} A_i C} = \alpha$ . Está aqui o segundo ângulo que precisávamos encontrado.

Quarto Passo: Por transitividade, como  $\Delta O B_{i+1} T_{i+1}$  é semelhante a  $\Delta O F T_{i+1}$  e  $\Delta O F P_{i+1}$  é semelhante a  $\Delta F A_{i+1} E$  e  $\Delta F A_{i+1} E$  é semelhante a  $\Delta A_i A_{i+1} C$ , resulta que  $\Delta O B_{i+1} T_{i+1}$  é semelhante a  $\Delta A_i A_{i+1} C$ .

Esta semelhança verifica-se para quaisquer dois triângulos construídos nas condições da figura e não acontece apenas no esquema geométrico que estamos a usar para chegar às R-diferenças.

Provada a semelhança entre  $\Delta A_i C A_{i+1}$  e  $\Delta B_{i+1} T_{i+1} O$  e considerando  $A_{i+1} C = d_{i+1}$ , podemos agora escrever:

$$\frac{A_{i+1}C}{A_iA_{i+1}} = \frac{OT_{i+1}}{OB_{i+1}} \Leftrightarrow \frac{d_{i+1}}{crd(1)} = \frac{OT_{i+1}}{r} \Leftrightarrow d_{i+1} = \frac{OT_{i+1}}{r} \times crd(1) \Leftrightarrow d_{i+1} = \frac{crd(1)}{r} \times OT_{i+1}.$$

Aplicando a igualdade anterior duas vezes, com  $i$  e  $i + 1$  como argumentos, chegamos à equação para a segunda diferença:

$$d_i - d_{i+1} = \frac{crd(1)}{r} \times (OT_i - OT_{i+1}) = \frac{crd(1)}{r} \times T_i T_{i+1}. \textbf{21)}$$

Vamos agora trabalhar sobre  $T_i T_{i+1}$ .

Por argumento semelhante ao já usado,  $\Delta B_i D B_{i+1}$  é semelhante a  $\Delta A_i P_i O$ . Podemos, assim, escrever:

$$\frac{B_i D}{B_i B_{i+1}} = \frac{A_i P_i}{A_i O} \Leftrightarrow \frac{T_i T_{i+1}}{B_i B_{i+1}} = \frac{R_i}{r} \Leftrightarrow T_i T_{i+1} = \frac{B_i B_{i+1} \cdot R_i}{r} \Leftrightarrow T_i T_{i+1} = \frac{crd(1)}{r} \times R_i \textbf{22)}$$

Substituindo a igualdade 22) em 21) vem:

$$d_i - d_{i+1} = \frac{crd(1)}{r} \times \frac{crd(1)}{r} \times R_i \Leftrightarrow \frac{d_i - d_{i+1}}{R_i} = \left[ \frac{crd(1)}{r} \right]^2 \textbf{23)}$$

Note-se que o lado direito de 23) é independente de  $i$ .

Na igualdade 23), fazendo  $i = 1$  ou considerando um valor de  $i$  qualquer obtemos:

$$\frac{d_i - d_{i+1}}{R_i} = \frac{d_1 - d_2}{R_1} \Leftrightarrow d_i - d_{i+1} = (d_1 - d_2) \times \frac{R_i}{R_1}.$$

Pode-se agora gerar a sequência dos senos.

Vejamos o cálculo das 24 diferenças a partir da fórmula 20):

Tabela 2 - Cálculo das 24 diferenças seguindo a fórmula de Nīlakanta

| Difere<br>nças:<br>$d_n$ | Fórmula                                  | Cálculo   | Valores de<br>Āryabhata |
|--------------------------|--|---|-------------------------|
| $d_1$                    | -----                                    | $d_1 = 225$   | 225                     |
| $d_2$                    | -----                                    | $d_2 = 224$   | 224                     |
| $d_3$                    | $d_3 = d_2 - \frac{R_2}{R_1}(d_1 - d_2)$ | $d_3 = 224 - \frac{225 + 224}{225} \cdot (225 - 224) = 224 - \frac{449}{225} \approx 222$ | 222                     |
| $d_4$                    | $d_4 = d_3 - \frac{R_3}{R_1}(d_1 - d_2)$ | $d_4 = 222 - \frac{225 + 224 + 222}{225} \cdot (225 - 224) \approx 219$                   | 219                     |
| $d_5$                    | $d_5 = d_4 - \frac{R_4}{R_1}(d_1 - d_2)$ | $d_5 = 219 - \frac{225 + 224 + 222 + 219}{225} \cdot (225 - 224) \approx 215$             | 215                     |
| $d_6$                    | $d_5 = d_4 - \frac{R_4}{R_1}(d_1 - d_2)$ | $d_6 = 210$   | 210                     |
| $d_7$                    | $d_5 = d_4 - \frac{R_4}{R_1}(d_1 - d_2)$ | $d_7 = 204$   | 205                     |
| $d_8$                    | ...                                      | $d_8 = 197$   | 199                     |
| $d_9$                    | ...                                      | $d_9 = 181$   | 191                     |
| $d_{10}$                 | ...                                      | $d_{10} = 189$  | 183                     |
| $d_{11}$                 | ...                                      | $d_{11} = 172$  | 174                     |
| $d_{12}$                 | ...                                      | $d_{12} = 162$  | 164                     |
| $d_{13}$                 | ...                                      | $d_{13} = 151$  | 154                     |
| $d_{14}$                 | ...                                      | $d_{14} = 140$  | 143                     |
| $d_{15}$                 | ...                                      | $d_{15} = 128$  | 131                     |
| $d_{16}$                 | ...                                      | $d_{16} = 115$  | 119                     |
| $d_{17}$                 | ...                                      | $d_{17} = 102$  | 106                     |

|          |     |               |    |
|----------|-----|---------------|----|
| $d_{18}$ | ... | $d_{18} = 88$ | 93 |
| $d_{19}$ | ... | $d_{19} = 74$ | 79 |
| $d_{20}$ | ... | $d_{20} = 60$ | 65 |
| $d_{21}$ | ... | $d_{21} = 45$ | 51 |
| $d_{22}$ | ... | $d_{22} = 30$ | 37 |
| $d_{23}$ | ... | $d_{23} = 15$ | 22 |
| $d_{24}$ | ... | $d_{24} = 0$  | 7  |

Como se verifica na tabela anterior, há valores que divergem entre os obtidos pela fórmula e os valores que são apresentados por Āryabhata. Segundo Datta & Singh (1983), Āryabhata parece que não usou a fórmula de forma consistente para toda a tabela. Provavelmente nesses casos Āryabhata corrigiu os valores calculados quando os comparou com os valores conhecidos dos senos de 30°, 45° e 60°; ou como é mais provável usou apenas a fórmula para calcular os R-senos de arcos intermédios.

Como Āryabhata terá chegado a esta regra? Em *The Mathematics of the Heavens and the Earth*, Van Brummelen (2009) diz que é possível que Āryabhata e outros tenham chegado a estas regras empiricamente, observando padrões nas diferenças encontradas em valores de seno gerados geometricamente. Também é possível ter encontrado a regra a partir de uma fonte antiga, indiana ou grega. Há também a ideia que poderiam ter começado o seu trabalho com tabelas de senos já existentes e encontrado os padrões nas diferenças por experimentação.

### 3.2.6. Cálculo das 24 diferenças com o Excel

Utilizando o Excel é gerada uma tabela com os valores dos ângulos utilizados por Āryabhata. A cada um desses ângulos irá corresponder uma diferença,  $d_i$ . As diferenças  $d_i$  são geradas por recorrência. A partir das diferenças  $d_i$  obtidas são calculados três erros: o primeiro, fazendo a diferença entre os valores  $d_i$  obtidos e os valores que encontramos na tabela que construímos anteriormente; o segundo, calculando as diferenças entre os valores da tabela que construímos anteriormente e os valores de Āryabhata e o terceiro, calculando as diferenças entre os valores  $d_i$  obtidos e os valores de Āryabhata.

A hiperligação para este ficheiro Excel é a seguinte: [Āryabhata\\_calculodiferencas.xlsx](#)

No Anexo a este trabalho encontra-se um *print screen* do ficheiro.

### 3.2.7. A construção da tabela de R-senos

Tabela 3 - Construção da tabela de R-senos de Āryabhata

| Ângulo                | $d_n$    | Diferenças de Āryabhata | Valores R-seno<br>$R_n = R_{n-1} + d_n$        | Valores de seno de Āryabhata<br>$J_n = \frac{R_n}{3438'}$ | Valores atuais de seno<br>$s_n$ | Erro<br>$\epsilon_n = J_n - s_n$ |
|-----------------------|----------|-------------------------|--|---|---------------------------------|----------------------------------|
| $3\frac{3}{4}^\circ$  | $d_1$    | 225                     | $R_1 = 225$                                    | $\frac{225}{3438'} = 0,065445...$                         | 0,06545031...                   | $4,1897... \times 10^{-5}$       |
| $7\frac{1}{2}^\circ$  | $d_2$    | 224                     | $R_2 = R_1 + d_2 = 225 + 224 = 449$            | $\frac{449}{3438'} = 0,130599...$                         | 0,13052619...                   | $7,2993... \times 10^{-5}$       |
| $11\frac{1}{4}^\circ$ | $d_3$    | 222                     | $R_3 = R_2 + d_3 = 449 + 222 = 671$            | $\frac{671}{3438'} = 0,195171...$                         | 0,195090322...                  | $8,12893... \times 10^{-5}$      |
| $15^\circ$            | $d_4$    | 219                     | $R_4 = R_3 + d_4 = 671 + 219 = 890$            | $\frac{890}{3438'} = 0,258871...$                         | 0,25881904...                   | $5,23917... \times 10^{-5}$      |
| $18\frac{3}{4}^\circ$ | $d_5$    | 215                     | $R_5 = R_4 + d_5 = 890 + 215 = 1105$           | $\frac{1105}{3438'} = 0,321407...$                        | 0,32143946...                   | $-3,16700... \times 10^{-5}$     |
| $22\frac{1}{2}^\circ$ | $d_6$    | 210                     | $R_6 = R_5 + d_6 = 1105 + 210 = 1315$          | $\frac{1315}{3438'} = 0,382489...$                        | 0,38268343...                   | $-1,93612... \times 10^{-4}$     |
| $26\frac{1}{4}^\circ$ | $d_7$    | 205                     | $R_7 = R_6 + d_7 = 1315 + 205 = 1520$          | $\frac{1520}{3438'} = 0,442117...$                        | 0,44228869...                   | $-1,71180... \times 10^{-4}$     |
| $30^\circ$            | $d_8$    | 199                     | $R_8 = R_7 + d_8 = 1520 + 199 = 1719$          | $\frac{1719}{3438'} = 0,5$                                | 0,5                             | 0                                |
| $33\frac{3}{4}^\circ$ | $d_9$    | 191                     | $R_9 = R_8 + d_9 = 1719 + 191 = 1910$          | $\frac{1910}{3438'} = 0,555555...$                        | 0,5555702...                    | $-1,46774... \times 10^{-5}$     |
| $37\frac{1}{2}^\circ$ | $d_{10}$ | 183                     | $R_{10} = R_9 + d_{10} = 1910 + 183 = 2093$    | $\frac{2093}{3438'} = 0,608784...$                        | 0,60876142...                   | $2,27478... \times 10^{-5}$      |
| $41\frac{1}{4}^\circ$ | $d_{11}$ | 174                     | $R_{11} = R_{10} + d_{11} = 2093 + 174 = 2267$ | $\frac{2267}{3438'} = 0,659394...$                        | 0,6593458...                    | $4,91819... \times 10^{-5}$      |

|                       |          |     |  |                                    |               |                             |
|-----------------------|----------|-----|--|------------------------------------|---------------|-----------------------------|
| $45^\circ$            | $d_{12}$ | 164 | $R_{12} = R_{11} + d_{12} = 2267 + 164 = 2431$ | $\frac{2431}{3438'} = 0,708842...$ | 0,70710678... | $-9,3168... \times 10^{-6}$ |
| $48\frac{3}{4}^\circ$ | $d_{13}$ | 154 | $R_{13} = R_{12} + d_{12} = 2431 + 154 = 2585$ | $\frac{2585}{3438'} = 0,751890..$  | 0,06545031... | $4,1897 \times 10^{-5}$     |
| $52\frac{1}{2}^\circ$ | $d_{14}$ | 143 | $R_{14} = R_{13} + d_{14} = 2585 + 143 = 2728$ | $\frac{2728}{3438'} = 0,793484...$ | 0,7933533...  | $1,31243... \times 10^{-4}$ |
| $56\frac{1}{4}^\circ$ | $d_{15}$ | 131 | $R_{15} = R_{14} + d_{15} = 2728 + 131 = 2859$ | $\frac{2859}{3438'} = 0,793484...$ | 0,83146961... | $1,18520... \times 10^{-4}$ |
| $60^\circ$            | $d_{16}$ | 119 | $R_{16} = R_{15} + d_{16} = 2859 + 119 = 2978$ | $\frac{2978}{3438'} = 0,866201...$ | 0,86602540... | $1,75876... \times 10^{-4}$ |
| $63\frac{3}{4}^\circ$ | $d_{17}$ | 106 | $R_{17} = R_{16} + d_{17} = 2978 + 196 = 3084$ | $\frac{3084}{3438'} = 0,897033...$ | 0,89687274... | $1,06417... \times 10^{-4}$ |
| $67\frac{1}{2}^\circ$ | $d_{18}$ | 93  | $R_{18} = R_{17} + d_{18} = 3084 + 93 = 3177$  | $\frac{3177}{3438'} = 0,924083...$ | 0,92387953..  | $2,04237... \times 10^{-4}$ |
| $71\frac{1}{4}^\circ$ | $d_{19}$ | 79  | $R_{19} = R_{18} + d_{19} = 3177 + 79 = 3256$  | $\frac{3256}{3438'} = 0,947062...$ | 0,946930...   | $1,32115... \times 10^{-4}$ |
| $75^\circ$            | $d_{20}$ | 65  | $R_{20} = R_{19} + d_{20} = 3256 + 65 = 3321$  | $\frac{3321}{3438'} = 0,965968..$  | 0,96592582... | $4,27600... \times 10^{-5}$ |
| $78\frac{3}{4}^\circ$ | $d_{21}$ | 51  | $R_{21} = R_{20} + d_{21} = 3321 + 51 = 3372$  | $\frac{3372}{3438'} = 0,980802...$ | 0,98078528... | $1,75119... \times 10^{-5}$ |
| $82\frac{1}{2}^\circ$ | $d_{22}$ | 37  | $R_{22} = R_{21} + d_{22} = 3372 + 37 = 3409$  | $\frac{3409}{3438'} = 0,991564...$ | 0,99144486... | $1,20001... \times 10^{-4}$ |
| $86\frac{1}{4}^\circ$ | $d_{23}$ | 22  | $R_{23} = R_{22} + d_{23} = 3409 + 37 = 3431$  | $\frac{3431}{3438'} = 0,997963...$ | 0,9978589...  | $1,05009... \times 10^{-4}$ |
| $90^\circ$            | $d_{24}$ | 7   | $R_{24} = R_{23} + d_{24} = 3431 + 7 = 3438$   | $\frac{3438}{3438'} = 1$           | 1             | 0                           |

Como se vê a precisão desta tabela é ótima considerando que foi obtida com métodos que têm pelo menos 1500 anos. A precisão é sempre de pelo menos três casas decimais.

### 3.2.8. A construção da tabela dos R-senos utilizando o Excel

Neste ficheiro Excel é construída uma tabela da seguinte forma: são obtidos, por recorrência, os valores de R-seno a partir da fórmula de Nīlakanta; seguidamente são obtidos os correspondentes valores de seno; na coluna seguinte é determinada a diferença entre os valores de seno obtidos e os valores atuais de seno. Depois, a partir dos valores de R-seno de Āryabhata são obtidos os valores de seno correspondentes; na última coluna temos as diferenças entre os valores de seno de Āryabhata e os valores atuais de seno.

A precisão dos valores de Āryabhata é claramente superior àquela que encontramos nos valores obtidos pela fórmula de Nīlakanta. A precisão é de no mínimo três casas decimais, o que reforça a ideia referida anteriormente de que Āryabhata foi fazendo correções à sua fórmula!

A hiperligação para este ficheiro Excel é a seguinte: [Āryabhata r-senos.xlsx](#)

No Anexo a este trabalho encontra-se um *print screen* do ficheiro.

### 3.3. Bhāskara I (600-680) e a aproximação racional do seno

A fonte é Van Brummelen, *The Mathematics of the heavens and the earth* de (2009).

O método de Bhāskara I para calcular o seno, sem recorrer a geometria, foi ainda mais audacioso. Pouco se sabe dele mas o fato de ter escrito um comentário sobre o trabalho de Āryabhata indica que trabalhou na mesma direção que estava a ser tomada na astronomia. Um dos seus trabalhos mais conhecidos é *Mahābhāskariya* que significa “O Grande (trabalho) de Bhāskara”, por volta de 600 d.C.. Neste trabalho encontra-se uma aproximação notável para o seno escrito como razão de duas funções quadráticas.

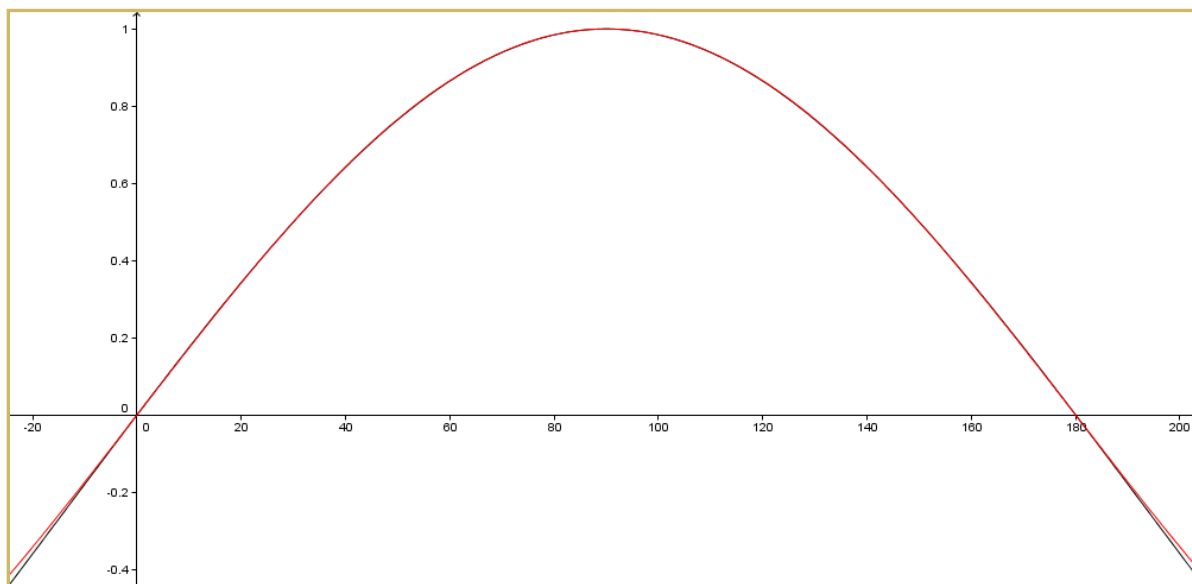


Ilustração 35 - Bhāskara<sup>6</sup>

<sup>6</sup> Fonte: < <http://matematicarev.blogspot.pt/2010/05/bhaskara-viveu-de-1114-1185.html> > 28/12/12

Como já antes tinha acontecido com Āryabhata, Bhāskara I apresenta a sua fórmula para calcular os senos sem qualquer explicação. Em notação moderna ele afirma que:

$$\sin \theta = R \cdot \frac{4\theta(180 - \theta)}{40500 - \theta(180 - \theta)}.$$



**Ilustração 36 - Gráficos da função seno: a preto a função de Bhāskara e a vermelho a função seno atual**

Esta função é muito próxima da função seno para valores entre 0° e 180°. Como podemos ver na Ilustração 36 que os gráficos são quase indistinguíveis. Na hiperligação [Bhaskara1.ggb](#) poderemos obter o erro que a fórmula de Bhāskara comete para valores do ângulo compreendidos entre 0° e 180°: o selector estabelece o valor do ângulo, em graus, cujos valores podem ser observados na primeira coluna da folha de cálculo; simultaneamente na animação do seletor pode-se ver o ponto *B* a percorrer a função seno; na segunda coluna da folha de cálculo, podemos observar a diferença entre os valores dados pela fórmula de Bhāskara e os da função seno. Utilizou-se a aproximação máxima permitida pelo GeoGebra que é de 15 algarismos significativos. Verifica-se que há sempre uma precisão mínima de 2 casas decimais.

A aproximação de Bhāskara foi utilizada e modificada posteriormente por vários astrónomos indianos até ao século XVI. Contudo nenhum deles respondeu à questão: como é que Bhāskara chegou à fórmula? Várias explicações foram propostas, nomeadamente assumindo que a função seno é o quociente de duas quadráticas e obtendo os coeficientes destas quadráticas substituindo valores conhecidos de seno.

No Anexo a este trabalho encontra-se um *print screen* do ficheiro.



Vamos apresentar uma dessas explicações, sendo a única que tem base geométrica.

Na Ilustração 37 seja  $AC$  igual a  $2R$ .

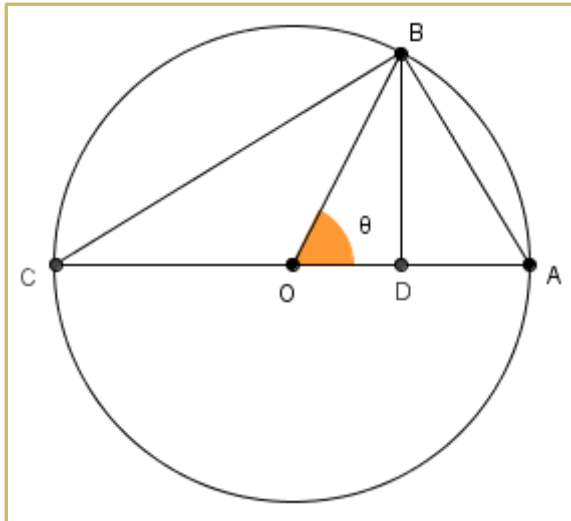


Ilustração 37 - Bhāskara I e a aproximação racional do seno

A área do triângulo  $ABC$  é igual a  $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC$  mas também é igual a  $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$  e por isso  $AB \cdot BC = AC \cdot BD$ . Como  $BD = \sin \theta$  vem:

$$\sin \theta = BD = \frac{AB \cdot BC}{AC} < \frac{\text{arc} AB \cdot \text{arc} BC}{AC} = \frac{\text{arc} AB \cdot \text{arc} BC}{2R} = \frac{\theta(180^\circ - \theta)}{2R}.$$

Passando ao recíproco obtemos:  $\frac{1}{\sin \theta} > \frac{2R}{\theta(180^\circ - \theta)}.$

Consideram-se agora duas variáveis  $x$  e  $y$  de forma a obter a igualdade:

$$\frac{1}{\sin \theta} = x \cdot \left( \frac{2R}{\theta(180^\circ - \theta)} \right) + y \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \theta} = \frac{2xR + y\theta(180^\circ - \theta)}{\theta(180^\circ - \theta)}. \text{ 24)}$$

Fazendo igualdade anterior  $\sin 30^\circ = \frac{R}{2}$  e  $\sin 90^\circ = R$  e obtemos um sistema de duas equações em  $x$  e  $y$ .

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \frac{2}{R} = \frac{2xR + y \cdot 30^\circ(180^\circ - 30^\circ)}{30^\circ(180^\circ - 30^\circ)} \\ \frac{1}{R} = \frac{2xR + y \cdot 90^\circ(180^\circ - 90^\circ)}{90^\circ(180^\circ - 90^\circ)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{R} = \frac{2xR + 4500y}{4500} \\ \frac{1}{R} = \frac{2xR + 8100y}{8100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{R} = \frac{2xR}{4500} + y \\ \frac{1}{R} = \frac{2xR}{8100} + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{R} - \frac{2xR}{4500} \\ \frac{1}{R} = \frac{2xR}{8100} + \frac{2}{R} - \frac{2xR}{4500} \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \begin{cases} \frac{1}{R} = \frac{10xR}{40500} - \frac{18xR}{40500} \\ -\frac{1}{R} = \frac{10xR}{40500} - \frac{18xR}{40500} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{R} = -\frac{8xR}{40500} \\ \frac{40500}{8R} = xR \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xR = \frac{40500}{4R} \\ y = \frac{2}{R} - \frac{40500}{4R} \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \begin{cases} y = \frac{2}{R} - \frac{40500}{18000R} = \frac{2}{R} - \frac{9}{4R} = -\frac{1}{4R} \\ 2xR = \frac{40500}{4R} \end{cases}
\end{aligned}$$

Substituindo os valores de  $2xR$  e  $y$  em 24) obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin \theta} &= \frac{\frac{40500}{4R}}{\theta(180^\circ - \theta)} - \frac{1}{4R} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \theta} = \frac{40500}{4R\theta(180 - \theta)} - \frac{1}{4R} \Leftrightarrow \\
\frac{1}{\sin \theta} &= \frac{40500}{4R\theta(180 - \theta)} - \frac{\theta(180 - \theta)}{4R\theta(180 - \theta)} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \theta} = \frac{40500 - \theta(180 - \theta)}{4R\theta(180 - \theta)} \Leftrightarrow \\
\sin \theta &= \frac{4R\theta(180 - \theta)}{40500 - \theta(180 - \theta)} \Leftrightarrow \sin \theta = R \cdot \frac{4\theta(180 - \theta)}{40500 - \theta(180 - \theta)}.
\end{aligned}$$

A fonte é Katz (2010).

Se usarmos a fórmula para calcular o seno de  $\theta = 20^\circ$  obtém-se:

$$3438 \sin 20^\circ = 3438 \cdot \frac{4 \cdot 20 \cdot 160}{40500 - 20 \cdot 160} \approx 1180 \text{ ou}$$

$$\sin 20^\circ = \frac{4 \cdot 20 \cdot 160}{40500 - 20 \cdot 160} = 0,3431635389 \dots$$

Como o valor atual de  $\sin 20^\circ$  é igual a 0,3420201433 o erro é aproximadamente 0,001!

### 3.4. Brahmagupta (598-670) e a fórmula de Newton-Sterling

As fontes são Van Brummelen, *The mathematics of the heavens and the earth* (2009) e Joseph (1991).

Brahmagupta tem um lugar especial na história da matemática dado que foi, em parte, a partir da tradução de *Khanda Khadyaka*, que os Árabes e depois o Ocidente, tomaram conhecimento da astronomia e da matemática indianas. E, claro que isso teve consequências nas duas disciplinas.



Ilustração 38 - Brahmagupta<sup>7</sup>

Brahmagupta escreveu dois livros. O primeiro e mais importante foi *Brahma Sphuta Siddhanta*. Contudo é o seu segundo trabalho que nos interessa. Trata-se de um tratado astronômico intitulado *Khanda Khadyaka* de 665 d.C. onde se encontram desenvolvimentos da trigonometria.

No nono capítulo deste último livro encontramos um dos mais extraordinários feitos de Brahmagupta. Trata-se de um método que começa com uma tabela de senos com apenas seis entradas e que permite calcular o seno de qualquer arco dado com um único cálculo e com uma precisão surpreendente (Tabela 4). A sua abordagem reduz-se a um esquema de interpolação de segunda ordem, o que é matematicamente equivalente à fórmula moderna de segunda ordem de Newton-Sterling. É possivelmente o primeiro uso de interpolação de diferença finita.

Brahmagupta usa  $R = 150$ .

---

<sup>7</sup> Fonte: < [http://www.storyofmathematics.com/indian\\_brahmagupta.html](http://www.storyofmathematics.com/indian_brahmagupta.html) > 1/03/2013

### 3.4.1. Aplicação da fórmula de interpolação de Brahmagupta

A fonte é Joseph (2009).

| Ângulo<br>$\theta$ | Seno indiano<br>$Sin\theta$ | Diferenças de 1ª<br>ordem<br>$\Delta_i$ | Diferenças de 2ª<br>ordem<br>$\Delta_{i+1} - \Delta_i$ |
|--------------------|-----------------------------|---|--|
| 0º                 | 0                           |   |  |
| 15º=900'           | 39                          | 39                                      |  |
| 30º=1800'          | 75                          | 36                                      | -3   |
| 45º=2700'          | 106                         | 31                                      | -5   |
| 60º=3600'          | 130                         | 24                                      | -7   |
| 75º=4500'          | 145                         | 15                                      | -9   |
| 90º=5400'          | 150                         | 5                                       | -10  |

Tabela 4 - Brahmagupta

Vamos usar a fórmula de interpolação de Brahmagupta para determinar o seno de 67º:

- o intervalo é:  $h = 15^\circ$  ou  $900'$  ;
- o ângulo residual é:  $\Delta\theta = (67 - 60) = 7^\circ$  ou  $420'$  ;
- os valores tabelados de que necessitamos são:  $\Delta_1 = 24$ ,  $\Delta_2 = 15$ .

O valor dado pela fórmula de interpolação é:

$$\frac{\Delta\theta}{h} \left[ \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + \frac{\Delta\theta}{h} \left( \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2} \right) \right].$$

Aplicando a fórmula de interpolação obtemos:

$$\frac{7}{15} \left( \frac{14 + 24}{2} + \frac{7}{15} \frac{15 - 24}{2} \right) = 8,12.$$

Então:

$$jya67^\circ = Sin60^\circ + 8,12 = 130 + 8,12 = 138,12,$$

que está próximo de  $150 \sin 67^\circ = 130,08$ , o valor moderno.

Segundo Katz (2010), não se sabe como Brahmagupta chegou a esta fórmula de interpolação.

### 3.4.2. A explicação da regra de Brahmagupta

A fonte é Datta e Singh (1983).

#### 3.4.2.1) Primeiras Diferenças

Suponhamos que se pretende calcular a função R-seno, R-cosseno ou R-seno verso de um arco  $\alpha'$ . Sejam  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  três valores consecutivos do argumento na tabela tal que  $\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$ .

| Valores do argumento $\alpha$ | Valores da função $f(\alpha)$ | Diferenças das funções |
|-------------------------------|-------------------------------|------------------------|
| $\alpha_1$                    | $f_1$                         | $\Delta_1$             |
| $\alpha_2$                    | $f_2$                         |                        |
| $\alpha_3$                    | $f_3$                         | $\Delta_2$             |

Tabela 5 - Método de Brahmagupta para obter o R-seno

Se  $\alpha_3 > \alpha' > \alpha_2$ , para calcular  $f(\alpha')$ , vamos usar a seguinte notação:

- $f_2$  irá ser “a função a ser excedida”;
- $f_3$  irá ser “a função a ser atingida”;
- $\Delta_1 = f_2 - f_1$  irá ser “a diferença ultrapassada”;
- $\Delta_2 = f_3 - f_2$  irá ser “a diferença a ser ultrapassada”.

Seja  $\alpha' - \alpha_2 = \Delta\theta$ .

Suponhamos que  $\alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = h$  (ou seja os valores de  $\alpha_i$  estão igualmente espaçados).

Os matemáticos anteriores a Brahmagupta usavam uma fórmula de interpolação linear simples. A fórmula de interpolação linear usada para calcular  $f(\alpha')$  era dada por:

$$f(\alpha') = f_2 + \frac{\Delta\theta}{h} \Delta_2.$$

Esta fórmula permite obter valores para seno corretos até à 1ª casa decimal.

Apliquemos o resultado ao exemplo que estamos a estudar:

$$f(67^\circ) = f(60^\circ) + \frac{67-60}{15} \cdot (f(75^\circ) - f(60^\circ)) = 130 + \frac{7}{15} \cdot (145 - 130) = 137.$$

### 3.4.2.2) Segundas diferenças

Brahmagupta irá apresentar um processo que permite obter valores mais precisos para  $f(\alpha')$ . Tal irá envolver a substituição de  $\Delta_2$  por outra expressão e dará luz a uma fórmula de interpolação de segunda ordem.

De fato, o primeiro matemático a usar interpolação de segunda ordem foi Brahmagupta no seu trabalho Khanda-Khadyaka em 665 d.C. Este trabalho contém uma tabela de R-senos para todo o arco de  $15^\circ$  num círculo igual a 150.

No Khanda-Khadyaka, Brahmagupta diz:

*“Metade da diferença entre as diferenças (tabulares) excedida e a se excedida é multiplicada pelos minutos (residuais) e dividido por 900; metade da soma daquelas diferenças mais ou menos aquele quociente conforme é maior ou menor que a diferença (tabular) a ser excedida, será o valor (corrigido) da diferença a ser excedida”.*

Ou seja,  $\Delta_2$  é substituído por:

$$\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} \mp \frac{\Delta\theta}{h} \left( \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} \right).$$

O sinal positivo ou negativo deve ser tomado conforme:

$$\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} < \text{ou} > \Delta_2.$$

Assim, de acordo com o método de Brahmagupta:

$$f(\alpha') = f_2 + \frac{\Delta\theta}{h} \left[ \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} \mp \frac{\Delta\theta}{h} \left( \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} \right) \right].$$

Alternativamente e de forma equivalente, conforme  $\Delta_1 < \Delta_2$  ou  $\Delta_1 > \Delta_2$ , a fórmula de Brahmagupta pode ser escrita na forma:

$$\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + \frac{\Delta\theta}{f} \left( \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2} \right),$$

donde se obtém a fórmula de interpolação de Sterling truncada nas diferenças de segunda ordem:

$$f(\alpha') = f_2 + \frac{\Delta\theta}{h} \left[ \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + \frac{\Delta\theta}{h} \left( \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2} \right) \right].$$

Na regra surge que  $h$  é 900, pois é o intervalo entre os valores consecutivos do argumento que é  $15^\circ$  ou  $900'$ .

Como vimos atrás o valor obtido para  $f(67^\circ)$ , com a fórmula de interpolação de segunda ordem, é igual a 138,12, valor bastante melhor do que aquele que foi obtido com a fórmula de interpolação linear simples.

### 3.5. Madhava de Sangamagramma (1340-1425) e as séries de potências para o seno e o cosseno

A fonte é Joseph (1991).

Madhava foi provavelmente o maior astrónomo-matemático indiano medieval, mas só ganhou esta importância recentemente como resultado da pesquisa da matemática de escola de Kerala.

A escola de Kerala, que se inicia com Madhava é provavelmente a mais famosa escola na matemática indiana, dado ter chegado a espantosas descobertas.

No que ao trabalho com séries infinitas diz respeito, encontramos as seguintes descobertas: a série de potências para a tangente inversa, usualmente atribuída a Gregory e Leibniz, a série de potências para  $\pi$ , a série de potências para o seno e cosseno, usualmente atribuída a Newton, aproximações para as funções seno e cosseno (de segunda ordem), usualmente atribuídas a Taylor e aproximações de terceira ordem da função seno, usualmente atribuídas a Gregory.

Para além do trabalho com séries infinitas foi feita a descoberta da fórmula de l'Huilier, o uso da fórmula de interpolação de Newton-Gauss e a afirmação do teorema do valor médio do cálculo integral.

A escola de Kerala teve origem no fim do século *XIV* e duraria até ao século *XVII*. Os elementos desta escola viveram numa região que hoje em dia se situa entre Cochim e Calecut, na costa sudoeste da Índia.

Uma dessas espantosas descobertas deve-se a Madhava! De fato, Madhava tomou o passo decisivo da passagem dos procedimentos finitos da matemática antiga ao infinito, o que está no centro da análise clássica moderna.

Todos os trabalhos de Madhava que sobreviveram são tratados de astronomia. Relativamente às suas contribuições matemáticas apenas poderemos recorrer aos comentários dos seus contemporâneos e sucessores. Entre estas contribuições destacam-se expansões de séries infinitas de funções circulares e trigonométricas e aproximações de séries finitas.

Madhava descobriu as séries de potências dos senos e dos cossenos trezentos anos antes de Isaac Newton. Estas séries fizeram a sua primeira aparição na Europa em 1676 numa carta escrita por Newton à Secretaria da Sociedade Real, Henry Oldenburg. As séries são dadas por:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \text{e} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

De notar que estas séries são atribuídas na maior parte dos livros de matemática a Newton.

### 3.5.1. Uma demonstração das séries de seno e cosseno

As fontes são Van Brummelen, *The Mathematics of the heavens and the earth* (2009) e Plofker (2008).

Vamos seguir o trabalho mais antigo que contem a demonstração da série de seno e cosseno e que se deve a Jyesthadeva em *Yuktibhāsā*.

#### 3.5.1.1) Pré requisitos

No trabalho indiano sobre primeiras e segundas diferenças era sabido, pelo menos por observação, que:

- as primeiras diferenças são proporcionais aos cossenos;
- as segundas diferenças são proporcionais aos senos.

Vejamos, seguidamente, que isto é verdade.

#### 3.5.1.2) A interpretação geométrica – parte 1

Vamos usar o círculo unitário da Ilustração 39.

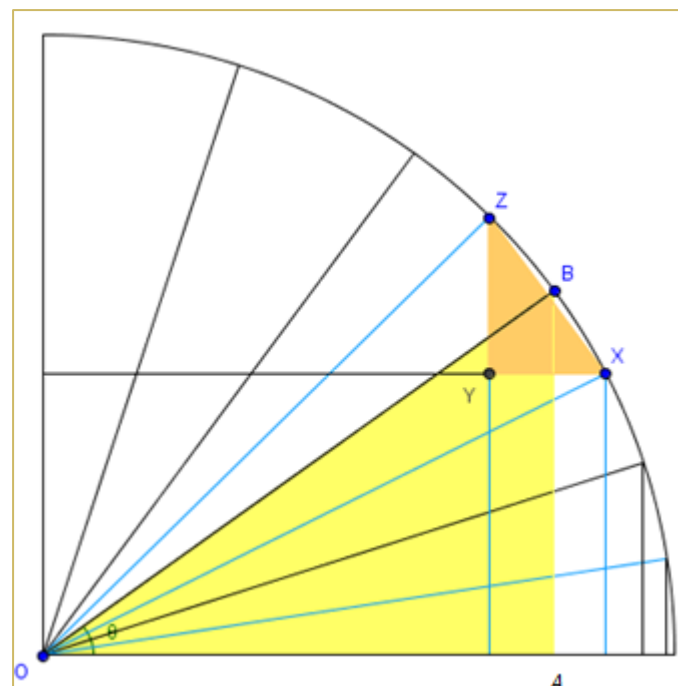


Ilustração 39 – Demonstração das séries de seno e cosseno:  
interpretação geométrica, parte 1



O arco  $\theta$  está dividido em  $n$  pequenos arcos  $\Delta\theta$ .

Iremos assumir que  $\Delta\theta$  é suficientemente pequeno e que  $crd\Delta\theta \approx \Delta\theta$ .

No  $\Delta ZYX$ ,  $YZ$  é a diferença,  $\Delta \sin \theta$ , entre  $\sin \angle AOZ$  e  $\sin \angle AOX$ .

Da mesma forma  $XY = \Delta \cos \theta = \cos \angle AOX - \cos \angle AOZ$ .

Como já sabemos de Āryabhata,  $\Delta OAB \sim \Delta ZYX$  e podemos escrever:

$$\frac{\Delta\theta}{\text{hipotenusa } \Delta OAB} \approx \frac{\text{cateto maior } \Delta ZYX}{\text{cateto maior } \Delta OAB} = \frac{\text{cateto menor } \Delta ZYX}{\text{cateto menor } \Delta OAB}$$

$$\frac{\Delta\theta}{1} \approx \frac{\Delta \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\Delta \cos \theta}{\sin \theta}$$

A partir daqui, podemos escrever as expressões para as primeiras diferenças:

$$\Delta \sin \theta = \cos \theta \cdot \Delta\theta,$$

$$\Delta \cos \theta = \sin \theta \cdot \Delta\theta. \quad 25)$$

Afirmações como estas eram usadas desde Bhāskara II (nascido em 1114). E vão ser usadas para obter uma expressão para a segunda diferença do seno:

$$\begin{aligned} \Delta^2 \sin \theta &= \Delta \sin \theta - \Delta \sin(\theta + \Delta\theta), \text{ por definição} \\ &= \cos \theta \cdot \Delta\theta - \cos(\theta + \Delta\theta) \cdot \Delta\theta \\ &= (\cos \theta - \cos(\theta + \Delta\theta)) \cdot \Delta\theta \\ &= \Delta \cos \theta \cdot \Delta\theta \\ &= \sin \theta \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\theta \\ &= \sin \theta \cdot (\Delta\theta)^2. \end{aligned}$$

### 3.5.1.3) A interpretação geométrica – parte II

O verdadeiro trabalho começa agora. Vamos considerar o círculo unitário da Ilustração 40.

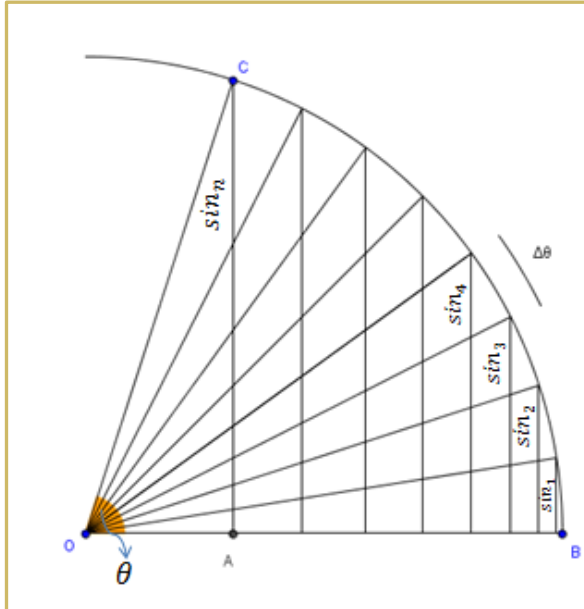


Ilustração 40 - Demonstração das séries de seno e cosseno: interpretação geométrica, parte 2

O arco  $\theta$  a ser analisado é dividido em  $n$  pequenos arcos  $\Delta\theta$ . Assim  $\theta = n \cdot \Delta\theta$ .

As linhas verticais representam os senos dos sucessivos múltiplos de  $\Delta\theta$ . Iremos usar a notação:

- $\sin_j = \sin(j \cdot \Delta\theta)$ ;
- $\Delta \sin_j = \sin_j - \sin_{j-1}$ .

Vamos considerar:

- $\Delta \sin_1 = \sin_1$ ;
- $\sin_n = \sin \theta$ ;
- como  $n$  é suficientemente grande, para  $\theta$  suficientemente pequeno,  $\theta = n \cdot \Delta\theta \approx n \cdot \sin_1$ , donde  $\Delta\theta \approx \sin \Delta\theta$ .

### 3.5.1.4) A construção do cosseno de 2ª ordem

Ao longo desta construção, tem-se como referência a Ilustração 40.

Estamos em condições para realizar o primeiro passo na iteração que nos irá levar à série pretendida: usando a aproximação de primeira ordem de seno,  $\sin \alpha \approx \alpha$ , iremos gerar a aproximação de segunda ordem de cosseno.

Note-se que o seno verso de  $\theta$ ,  $AB$  na Ilustração 40, é igual à soma das diferenças de cosseno  $\Delta \cos_j$ . Então, como  $\Delta \cos \theta = \sin \theta \cdot \Delta \theta$ , vem:

$$\begin{aligned}
 \text{vers}\theta &= 1 - \cos \theta = \overline{AB} = \\
 &= \sum_{j=1}^n \Delta \cos_j = \\
 &= \sum_{j=1}^n \sin_j \cdot \Delta \theta = \quad \quad \quad 26) \\
 &= \sin_1 \cdot \Delta \theta + \sin_2 \cdot \Delta \theta + \dots + \sin_n \cdot \Delta \theta = \\
 &= (\sin_1 + \sin_2 + \dots + \sin_n) \Delta \theta
 \end{aligned}$$

Como  $\sin \alpha \approx \alpha$  para todos os senos nesta expressão, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \text{vers}\theta &= 1 - \cos \theta = \overline{AB} = \\
 &= \left( \sum_{j=1}^n \sin_j \right) \cdot \Delta \theta = \left( \sum_{j=1}^n \sin(j \cdot \Delta \theta) \right) \cdot \Delta \theta \\
 &\approx \left( \sum_{j=1}^n j \cdot \Delta \theta \right) \cdot \Delta \theta \\
 &= (1 \cdot \Delta \theta + 2 \cdot \Delta \theta + 3 \cdot \Delta \theta + \dots + n \cdot \Delta \theta) \cdot \Delta \theta \\
 &= \left( 1 \cdot \frac{\theta}{n} + 2 \cdot \frac{\theta}{n} + \dots + n \cdot \frac{\theta}{n} \right) \cdot \Delta \theta, \text{ pois } \theta = n \cdot \Delta \theta \\
 &= (1 + 2 + \dots + n) \cdot \frac{\theta}{n} \cdot \Delta \theta \\
 &= (1 + 2 + \dots + n) \cdot (\Delta \theta)^2, \text{ pois } \frac{\theta}{n} = \Delta \theta \\
 &\approx \frac{n^2}{2} \cdot (\Delta \theta)^2 \quad \quad \quad 27)
 \end{aligned}$$

Falta explicar a última igualdade de 27).

A aproximação da soma de inteiros positivos de 1 até  $n$  era bem conhecida. De fato, fórmulas corretas para as somas de potências de expoente  $m$  dos primeiros  $n$  inteiros positivos tinham sido descritas já em meados do século *XIV*. Na argumentação que está a ser realizada, o que será preciso são as aproximações do tipo:

$$1^m + 2^m + \dots + n^m \approx \frac{n^{m+1}}{(m+1)}.$$
<sup>8</sup>

Estamos a aproximar-nos da aproximação de segunda ordem para o cosseno. Como  $\theta = n \cdot \Delta\theta$  podemos escrever:

$$\text{vers}\theta = 1 - \cos\theta \approx \frac{n^2}{2} \cdot (\Delta\theta)^2 = \frac{n^2}{2} \cdot \left(\frac{\theta}{n}\right)^2 = \frac{\theta^2}{2}$$

donde:

$$1 - \cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2} \Leftrightarrow \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$
<sup>28)</sup>

### 3.5.1.6) A construção do seno de 3ª ordem

Sejam  $\cos_{\frac{1}{2}}$  e  $\text{vers}_{\frac{1}{2}}$  o cosseno e o seno reverso de  $\frac{\Delta\theta}{2}$ ,  $\cos_{\frac{3}{2}}$  e  $\text{vers}_{\frac{3}{2}}$  o cosseno e o seno reverso de  $\Delta\theta + \frac{\Delta\theta}{2}$ , e assim sucessivamente.

---

<sup>8</sup> A demonstração desta aproximação segue no Anexo.

Observemos a Ilustração 41:

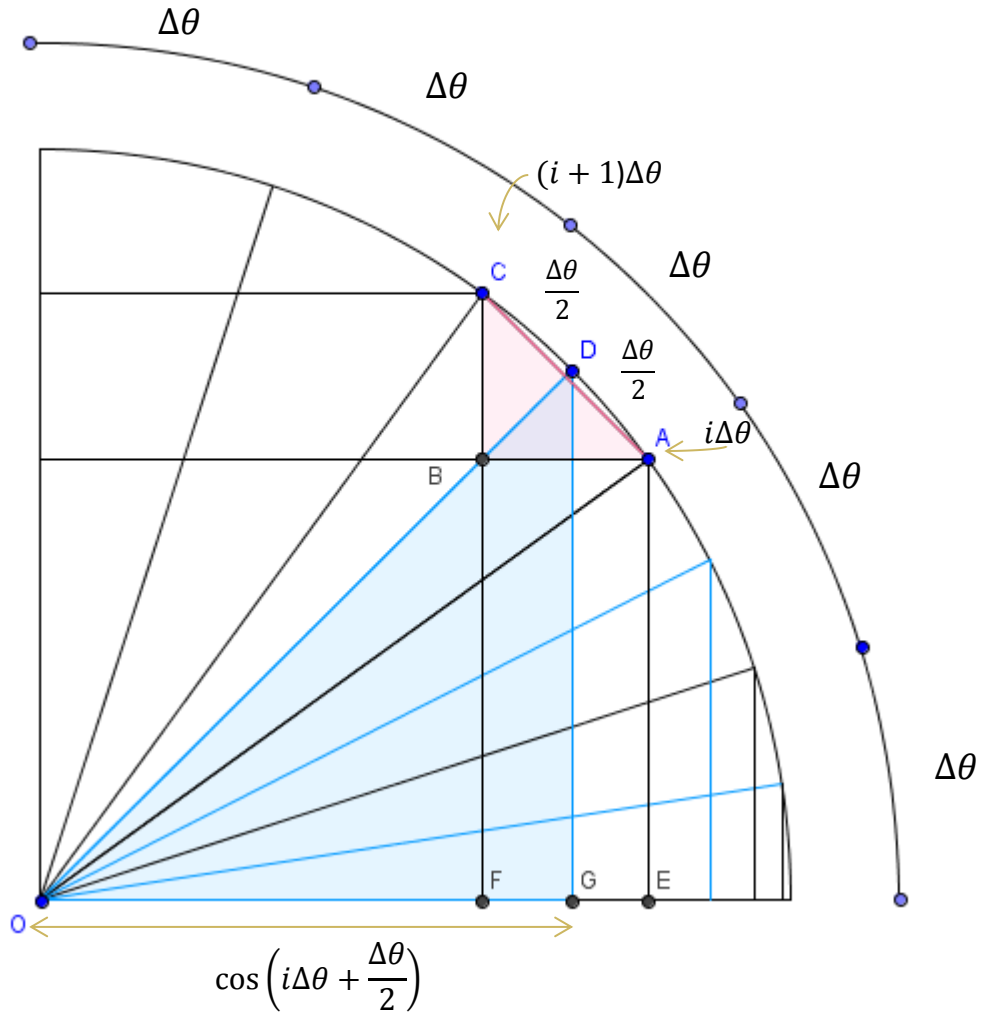


Ilustração 41 - Construção do seno de 3ª ordem

Observamos que  $BC = \sin_{i+1} - \sin_i = \Delta \sin_{i+1}$ .

Como já sabemos, os triângulos ABC e DGO são semelhantes pelo que podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{BC}{OG} &= \frac{AC}{r} \Leftrightarrow \frac{BC}{OG} = \frac{crd\Delta\theta}{1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{BC}{OG} &= crd\Delta\theta \Leftrightarrow BC = OG \cdot crd\Delta\theta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Delta \sin_{i+1} &\approx \cos\left(i\Delta\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) \cdot \Delta\theta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Delta \sin_{i+1} &\approx \cos_{i+\frac{1}{2}} \cdot \Delta\theta \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\Delta \sin_1 &= \cos_{\frac{1}{2}} \cdot \Delta \theta = \left(1 - \text{vers}_{\frac{1}{2}}\right) \cdot \Delta \theta ; \\ \Delta \sin_2 &= \cos_{\frac{3}{2}} \cdot \Delta \theta = \left(1 - \text{vers}_{\frac{3}{2}}\right) \cdot \Delta \theta ; \\ &\dots \\ \Delta \sin_n &= \cos_{n-\frac{1}{2}} \cdot \Delta \theta = \left(1 - \text{vers}_{n-\frac{1}{2}}\right) \cdot \Delta \theta . \quad \text{29)}\end{aligned}$$

Subtraindo cada uma destas equações da primeira obtemos:

$$\begin{aligned}\Delta \sin_1 - \Delta \sin_n &= \left(1 - \text{vers}_{\frac{1}{2}}\right) \cdot \Delta \theta - \left(1 - \text{vers}_{n-\frac{1}{2}}\right) \cdot \Delta \theta = \\ &= \left(\text{vers}_{n-\frac{1}{2}} - \text{vers}_{\frac{1}{2}}\right) \cdot \Delta \theta = \quad ; \quad \text{30)} \\ &\approx \text{vers}_n \cdot \Delta \theta = \\ &\approx \Delta \theta \cdot \frac{n^2}{2} (\Delta \theta)^2\end{aligned}$$

$$\Delta \sin_1 - \Delta \sin_{n-1} \approx \text{vers}_{n-1} \cdot \Delta \theta \approx \Delta \theta \cdot \frac{(n-1)^2}{2} (\Delta \theta)^2 = \frac{(n-1)^2}{2} \cdot (\Delta \theta)^3 ;$$

$$\begin{aligned}&\dots \\ \Delta \sin_1 - \Delta \sin_2 &\approx \text{vers}_2 \cdot \Delta \theta \approx \Delta \theta \cdot \frac{(2)^2}{2} (\Delta \theta)^2 = \frac{(2)^2}{2} \cdot (\Delta \theta)^3 ,\end{aligned}$$

pois  $\text{vers}_{\frac{1}{2}} \approx 0$  e  $\text{vers}_{n-\frac{1}{2}} \approx \text{vers}_n$  e  $\text{vers}_\theta \approx \frac{n^2}{2} \cdot (\Delta \theta)^2$  (que vimos anteriormente). Adicionando os

lados esquerdos das aproximações 30) vem:

$$\begin{aligned}(n-1) \cdot \Delta \sin_1 - (\Delta \sin_n + \Delta \sin_{n-1} + \dots + \Delta \sin_2) &= \\ &= n \cdot \Delta \sin_1 - (\Delta \sin_1 + \Delta \sin_2 + \dots + \Delta \sin_n) \approx \\ &\approx \theta - (\sin_1 + \sin_2 - \sin_1 + \sin_3 - \sin_2 + \dots + \sin_{n-1} + \sin_n - \sin_{n-1}) = \\ &= \theta - \sin_n = \theta - \sin \theta.\end{aligned}$$

Se adicionarmos ambos os lados de 30) obtemos:

$$\theta - \sin \theta \approx \left[ n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 \right] \cdot \frac{(\Delta\theta)^3}{2} \approx \left( \frac{n^3}{3} \right) \cdot \frac{(\Delta\theta)^3}{2} = \frac{n^3}{3!} \cdot (\Delta\theta)^3. \quad 31)$$

Aplicando  $\theta = n \cdot \Delta\theta$  a 31), obtemos aproximação de terceira ordem de seno:

$$\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!}.$$

#### A automatização do processo

Neste ponto da iteração o processo pode ser automatizado.

Obtivemos a aproximação do cosseno anterior aplicando  $\sin \alpha \approx \alpha$  a 26) para obter 27). Agora em vez de usar  $\sin \alpha \approx \alpha$ , vamos usar a aproximação melhorada  $\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!}$ . Vamos também usar

$\Delta\theta = \frac{\theta}{n}$ ,  $2 \cdot \Delta\theta = 2 \cdot \frac{\theta}{n}$ , ... Assim obtemos:

$$\begin{aligned} 1 - \cos \theta &= (\sin_1 + \sin_2 + \dots + \sin_n) \cdot \Delta\theta \\ &= [\sin(1 \cdot \Delta\theta) + \sin(2 \cdot \Delta\theta) + \dots + \sin(n \cdot \Delta\theta)] \cdot \Delta\theta \\ &= \left[ \left( \frac{\theta}{n} - \frac{(\theta/n)^3}{3!} \right) + \left( \frac{2\theta}{n} - \frac{(2\theta/n)^3}{3!} \right) + \dots \right] \cdot \Delta\theta \\ &= \left[ \frac{\theta}{n} + \frac{2\theta}{n} + \dots \right] \cdot \Delta\theta - \left[ \frac{(\theta/n)^3}{3!} + \frac{(2\theta/n)^3}{3!} + \dots \right] \cdot \Delta\theta \\ &= (1 + 2 + \dots + n) \cdot \frac{\theta}{n} \cdot \Delta\theta - (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) \cdot \frac{(\theta/n)^3}{3!} \cdot \Delta\theta \\ &= \left( \frac{n^2}{2} \right) \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\theta - \left( \frac{n^4}{4} \right) \cdot \frac{1}{3!} \cdot (\Delta\theta)^3 \cdot \Delta\theta \\ &= \left( \frac{n^2}{2} \right) \cdot (\Delta\theta)^2 - \left( \frac{n^4}{4} \right) \cdot \frac{(\Delta\theta)^4}{3!}. \end{aligned}$$

32)

Voltando a usar  $\theta = n \cdot \Delta\theta$ , chegamos a:

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!}.$$

Analogamente para o seno de quinta ordem: obtivemos a aproximação do seno anterior aplicando a aproximação anterior de cosseno 27) a 30) o que resultou em 31). Se usarmos o cosseno atualizado 32) obtemos:

$$\begin{aligned}
\theta - \sin \theta &= \sum_{i=1}^n \Delta \theta \cdot vers_n = \sum_{i=1}^n (\Delta \theta \cdot (1 - \cos_n)) = \\
&= \left( \sum_{i=1}^n (1 - \cos(n \cdot \Delta \theta)) \right) \cdot \Delta \theta \quad \text{como } 1 - \cos \theta = 1 - \cos(n \cdot \Delta \theta) = \left( \frac{n^2}{2} \right) \cdot (\Delta \theta)^2 - \left( \frac{n^4}{4} \right) \cdot \frac{(\Delta \theta)^4}{3!} \\
&= \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{n^2}{2} \right) \cdot (\Delta \theta)^2 - \left( \frac{n^4}{4} \right) \cdot \frac{(\Delta \theta)^4}{3!} \right) \cdot \Delta \theta \\
&= \left( \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{n^2}{2} \right) \cdot (\Delta \theta)^3 - \left( \frac{1^4}{4!} + \frac{2^4}{4!} + \dots + \frac{n^4}{4!} \right) \cdot (\Delta \theta)^5 \\
&= (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\Delta \theta)^3 - (1^4 + 2^4 + \dots + n^4) \cdot \frac{1}{4!} \cdot (\Delta \theta)^5 \\
&\approx \frac{n^3}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\Delta \theta)^3 - \frac{n^5}{5} \cdot \frac{1}{4!} \cdot (\Delta \theta)^5 \\
&= \frac{n^3}{3!} \cdot (\Delta \theta)^3 - \frac{n^5}{5!} \cdot (\Delta \theta)^5
\end{aligned}$$

Como  $\theta = n \cdot \Delta \theta$  vem:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}$$

A partir deste ponto, utilizando as aproximações de seno e de cosseno melhoradas na determinação de cosseno e seno, obtemos um novo termo de cada vez. Como vemos, há um padrão nos coeficientes.

São argumentos como os que foram usados que suportam a ideia de que o cálculo era conhecido desde a Índia Medieval. De fato, alguma da álgebra usada é semelhante aos argumentos das somas de Riemann no cálculo integral. Por outro lado, a relação entre 25) e as regras de derivação para o seno e o cosseno é óbvia.

Contudo estes argumentos não podem ser tomados seriamente. O que fez o de Cálculo significativo para a Ciência ocidental foi a sua capacidade de manusear derivadas e integrais de várias funções sistematicamente.

O trabalho de Madhava e de outros em algumas funções trigonométricas não pode ser associado ao cálculo tal como se fez relativamente ao uso de Arquimedes do método de exaustão para integrar círculos.

Contudo esta observação não diminui os feitos de Madhava pois a sua matemática está entre a mais engenhosa e poderosa do período medieval.

Com as suas séries, Madhava poderia calcular mais facilmente os seus senos e com a aproximação que pretendesse. A tabela de senos que obteve era de longe a mais rigorosa do seu tempo na Índia.



Embora a tabela esteja construída para vinte e quatro arcos desenhados em intervalos iguais num quadrante de círculo (ou seja para múltiplos de  $3; 45^\circ$ ), cada entrada está correta até 7 casas decimais, o que a coloca em pé de igualdade com as melhores tabelas disponíveis no mundo árabe do seu tempo. Tal rigor não seria atingido na Europa nos próximos duzentos anos.

### 3.5.2. A tabela de senos de Madhava

Usando o Excel, obtemos valores aproximados para o seno dos 24 ângulos habitualmente considerados. Nesta tabela temos os valores aproximados até à 75ª ordem. Note-se que embora os ângulos estejam em graus, os valores de seno no Excel são calculados para ângulos em radianos pelo que se fez a conversão dos ângulos em radianos.

A hiperligação para o ficheiro é a seguinte: [Madhava.xlsx](#)

No Anexo a este trabalho encontra-se um *print screen* do ficheiro.

## 3.6. O porquê da divisão do quadrante em 24 partes

A fonte é Datta & Singh (1983).

Os indianos usam arcos de  $3^\circ 45'$  o que gera os 24 *R-senos* num quadrante. Porquê esta divisão de um quadrante em 24 partes?

A escolha do número 24 parece resultar de uma observação antiga que a 96ª parte de um círculo parece uma vara ou na ideia, semelhante, de que o olho humano ao observar  $\frac{1}{96}$  da circunferência da Terra, esta aparece plana.

Contudo há hipóteses mais plausíveis. Tendo os indianos determinado, previamente, um valor muito preciso de  $\pi$  era para eles natural escolher um raio de um círculo com valor igual a  $3438'$ . Eles também sabiam que  $R \sin 30^\circ = \text{semi} - \text{raio} = 1719'$ . A partir daqui começaram a calcular a função dos semiarcos  $15^\circ, 7^\circ 30', 3^\circ 45'$  com a ajuda de fórmulas conhecidas. Ao fazê-lo verificaram que  $3^\circ 45'$  era o primeiro ângulo cujo R-seno contém o mesmo número de minutos que o arco. E daí a escolha deste arco.

## 3.7. Aplicação dos Senos e dos Cossenos a equações planetárias

### 3.7.1. Planetas internos e externos

A fonte é o Site Web Planetas.

Os planetas agrupam-se em duas categorias, de acordo com as diferenças de tamanho, massa e composição: os planetas internos ou telúricos (semelhantes à Terra) são os quatro planetas mais interiores do Sistema Solar, Mercúrio, Vénus, Terra e Marte; os planetas externos ou jovianos (semelhantes a Júpiter) são os "gigantes gasosos" que se encontram para além de Marte e da Cintura de Asteroides, Júpiter, Saturno, Úrano e Neptuno. Plutão é atualmente classificado como planeta anão.

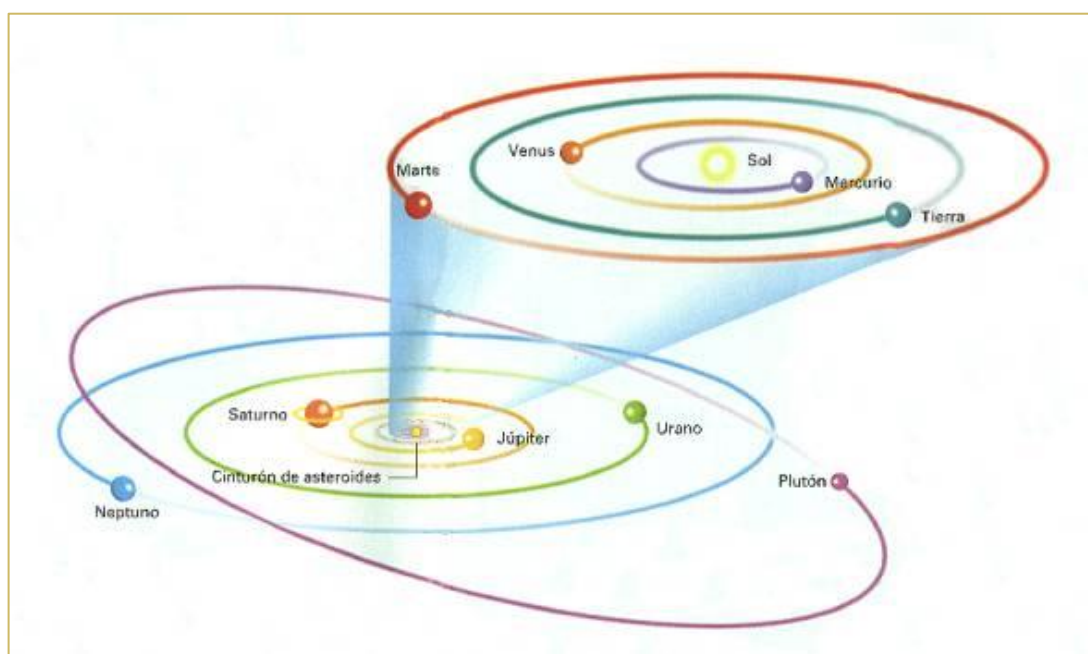


Ilustração 42 - A posição relativa dos planetas do Sistema Solar: planetas internos e externos<sup>9</sup>

<sup>9</sup> Fonte: <[http://www.prof2000.pt/users/angelof/4\\_sistema\\_solar\\_planetas.htm](http://www.prof2000.pt/users/angelof/4_sistema_solar_planetas.htm)> 31/03/2013

### 3.7.2. Teoria dos Epiciclos

A fonte é Van Brummelen, *The mathematics of the heavens and the earth* (2009).

A trajetória do Sol ao longo da Esfera Celeste foi um dos sinais mais óbvios que os objetos nos céus não se podem mover apenas de acordo com o princípio de Aristóteles de movimento uniforme em torno de um círculo com a Terra no seu centro. O Sol move-se, como sabemos, ao longo da eclíptica. Por outro lado Hiparco observa que o Sol demora  $94 \frac{1}{2}$  dias a atravessar um ângulo de  $90^\circ$  desde o equinócio da Primavera ao solstício de Verão e  $92 \frac{1}{2}$  dias partindo do solstício de Verão até ao equinócio de outono.

Os modelos geométricos que apresentam as anomalias nos movimentos dos planetas foram avançados antes de Hiparco. Enquanto o Sol e Lua aceleram e desaceleram, os planetas movem-se de forma mais dramática, geralmente próximo da eclíptica mas ocasionalmente fazendo marcha atrás antes de prosseguir o seu caminho.

Apolónio, no fim do século *III* a.C. é o primeiro autor conhecido a discutir uma teoria simples dos epiciclos. Na Ilustração 43, que representa o plano contendo a eclíptica, o centro do pequeno círculo (o epiciclo) viaja em velocidade uniforme em torno da circunferência de um círculo maior (o deferente). Variando de forma apropriada os tamanhos dos círculos e as razões das velocidades produzem-se acelerações, desacelerações ou movimentos retrógrados, conforme desejado.

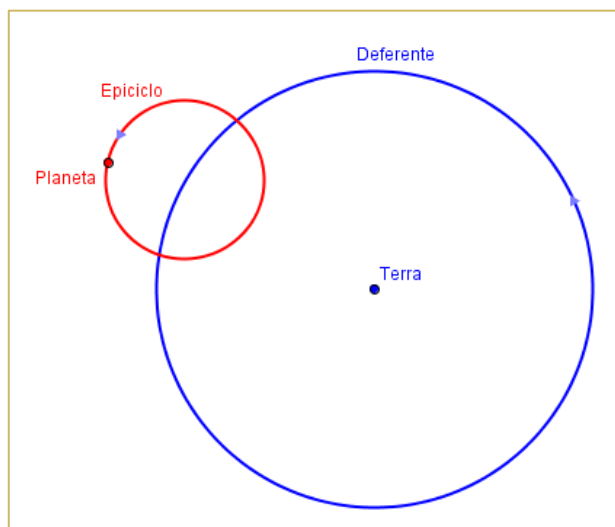


Ilustração 43 - Teoria dos Epiciclos de Apolónio

### 3.7.3. O modelo dos Epíclis de Ptolomeu

A fonte é Aaboe (1964).

Como já vimos, Hiparco retira a Terra do centro do deferente e esse modelo é seguido por Ptolomeu.

A Ilustração 44, representa o modelo de epíclis que Ptolomeu usou para qualquer planeta, exceto Mercúrio.

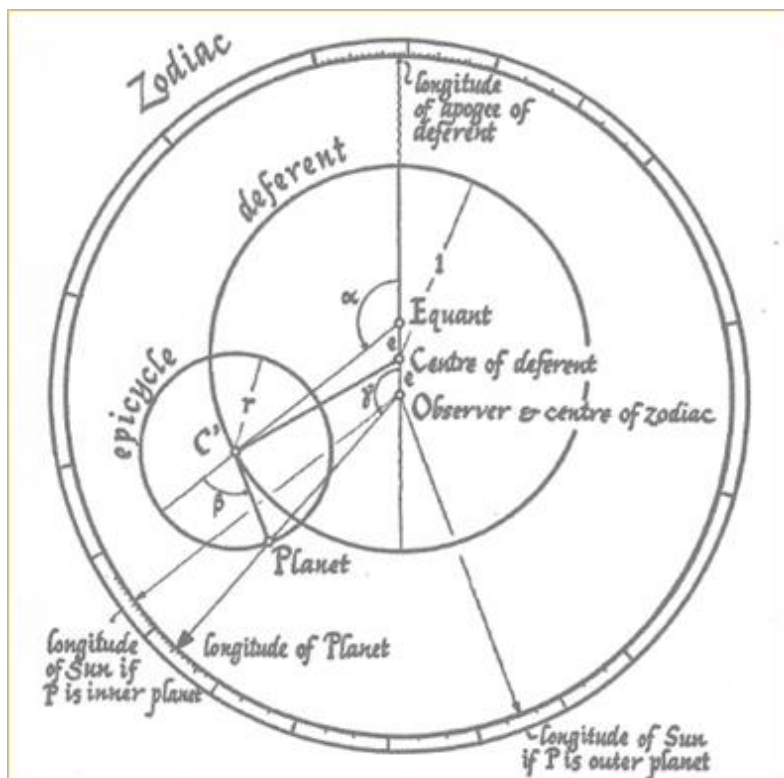


Ilustração 44 - Teoria dos Epíclis de Ptolomeu<sup>10</sup>

Na Ilustração 44, no plano do papel está a eclíptica vista do Polo norte. Recordamos que a eclíptica ou zodíaco é o caminho aparente percorrido pelo Sol entre as estrelas ao longo de um ano. É um círculo máximo da esfera celeste dividido em 12 partes ou signos do zodíaco (Carneiro, Touro, ...) de 30° cada. O zodíaco era usado como círculo de referência para descrever a trajetória dos planetas entre as estrelas, para um planeta visto próximo da eclíptica. Na Ilustração 44 a situação está simplificada e assumimos que o planeta está no plano da eclíptica.

O planeta  $P$  move-se num epíclis, cujo centro  $C'$  se move no deferente. O observador está em  $O$ , fora do centro  $C$  do deferente. A distância  $OC = e$  é a excentricidade do deferente e o segmento que une  $O$  a  $C$  é fixo relativamente às estrelas. A longitude do apogeu (ponto da eclíptica que se encontra à distância máxima da Terra) do deferente é constante.

<sup>10</sup> Aaboe (1964)

Ptolomeu considera que o raio do deferente é 1 e que o raio do epiciclo é  $r$ , na mesma unidade.

O movimento do planeta  $P$  é dado da seguinte forma:  $C'$  move-se uniformemente em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, não em torno de  $C$  mas em torno de  $E$ , que se designa o *ponto equante*;  $E$  é simétrico a  $O$  relativamente a  $C$ , ou seja  $OE = e$ . Isso significa que o ângulo  $\alpha$  aumenta à mesma razão todos os dias.  $P$  move-se no epiciclo de tal forma que  $\beta$  aumenta por uma razão constante todos os dias. Estes ângulos variam de tal forma que a direção de  $O$  para o Sol é a mesma que a direção de  $E$  para  $C'$  para Vénus, e de  $C'$  para  $P$ , para planetas externos.

Se neste modelo conhecermos:

1.  $r$ , o raio do epiciclo,
2.  $e$ , a excentricidade do deferente,
3. a longitude do apogeu do deferente,
4. os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ ,
5. a razão de aumento de  $\alpha$  e  $\beta$ ,

poderemos determinar a longitude do planeta em qualquer altura. Se o instante é dado poderemos determinar  $\alpha$  e  $\beta$  e depois bastará determinar  $\gamma$  que adicionado à longitude do apogeu do deferente dá a longitude do planeta.

### 3.7.4. O modelo planetário indiano

As fontes são Van Brummelen, *The mathematics of the heavens and the earth* (2009) e Plofker (2008).

Na Índia, no século V d.C., começam a ser escritos tratados chamados *siddhānta*. Estes tratados são escritos em verso e em sânscrito pelo que nem sempre são fáceis de perceber. Também aqui os tratados são inseparáveis dos comentários dos autores ou de outros escritores posteriores.

Um *siddhānta* típico segue, em geral, uma estrutura de ataque a um conjunto de problemas. No capítulo um: parâmetros astronómicos e cálculo de movimentos celestes médios e posições médias; no capítulo dois: métodos trigonométricos para determinar posições reais; no capítulo três: cálculo da direção, lugar e tempo aparentes de um fenómeno celeste observado a partir de uma localização particular na terra; no capítulo quatro: cálculo de eclipses lunares; no capítulo cinco: cálculo de eclipses solares. Nos capítulos seguintes há vários tópicos de carácter astrológico.

O *Āryabathīya* é um exemplo, que já estudamos, de um *siddhānta* mas onde esta estrutura aparece modificada.

O assunto que nos vai interessar é o segundo: métodos trigonométricos para determinar posições reais de planetas! Iremos observar a capacidade dos Indianos em dar um uso criativo e inovador ao conhecimento obtido de outras culturas, bem exemplificado na sua abordagem ao movimento dos planetas.

Tal como na astronomia de Ptolomeu, num *siddhānta* uma das primeiras tarefas é calcular posições celestes! Falar de posições celestes é o mesmo que falar de *posições médias de um corpo celeste num determinado momento* ou seja a posição que iria ocupar naquele momento se estivesse a circular em torno da terra num movimento circular uniforme numa órbita concêntrica.

No segundo capítulo é feita a correção das posições médias para as posições reais. Ou seja, assume-se que um planeta se move com movimento circular uniforme mas não numa órbita concêntrica simples. Assim o seu movimento uniforme visto da Terra vai parecer não uniforme, e as posições médias entretanto calculadas têm de ser corrigidas matematicamente de forma a fazer uma previsão do local onde o planeta irá de fato estar no céu num certo instante. Como estas correções envolvem combinações de círculos, os algoritmos associados vão depender de Senos.

Na literatura indiana podem encontrar-se vários modelos de movimento dos planetas mas todos eles envolvendo círculos excêntricos (círculos que não têm o mesmo centro) e epiciclos. As construções indianas têm, assim, elementos familiares à astronomia grega.

O deslocamento da posição média de um planeta da sua posição real depende da sua anomalia ou separação angular do seu apogeu.

O Sol e a Lua têm apenas uma anomalia, a mais lenta - *manda* – que resulta da eclíptica e da sua órbita. Os planetas têm uma segunda anomalia, a mais rápida – *śīghra* – que causa o aparente movimento retrógrado do planeta.

Observe-se Ilustração 45:

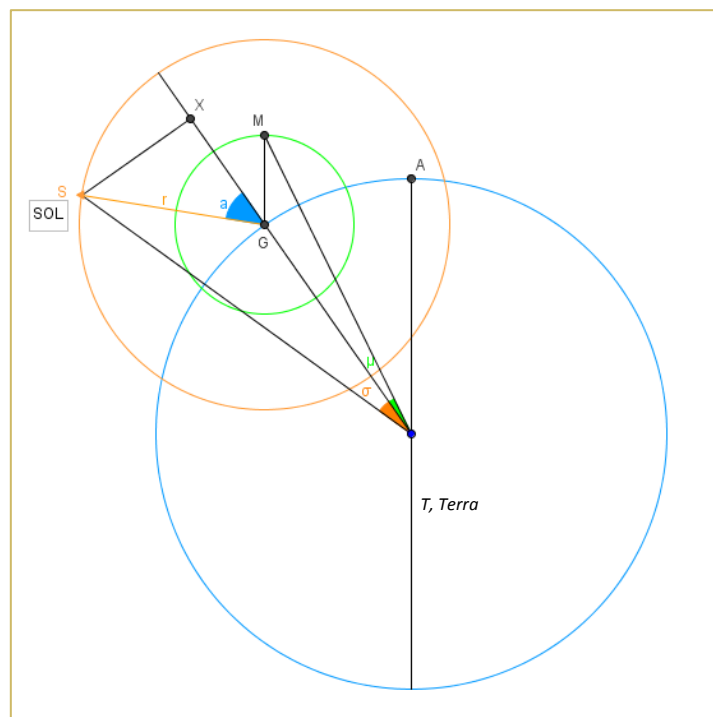


Ilustração 45 - Modelo planetário indiano

Os trabalhos mais antigos funcionam da seguinte forma:

- $AG$  é o círculo deferente, centrado na Terra,  $T$ ;

- em  $G$  estão centrados dois círculos:

- ✓ o círculo mais lento ou *manda* tem raio  $GM = e$  e está sempre paralelo a  $TA$ , o apogeu.  $M$ , a *mandocca*, determina a correção da *manda*  $\mu = \angle MTG$ , ou seja ajusta a posição média à posição real ( $\mu = \angle MTG$  é o deslocamento do planeta provocado pelo epiciclo rápido, *śighra*). O objetivo irá ser determinar  $\mu$ .

- ✓ o epiciclo rápido, ou *śighra*, tem raio  $GS = r$ , que para planetas superiores aponta na direção do Sol.  $S$ , a *śighrocca*, determina a correção de *śighra*  $\sigma = \angle GTS$ , valor a determinar.

- a correção da *manda* move a Terra para fora do círculo do deferente;

- a correção de *śighra* tem o mesmo papel do epiciclo grego.

Notar que:

- $G$  move-se na circunferência de centro  $T$ , no sentido dos ponteiros do relógio;

- $M$  (o planeta) que está no epiciclo de centro  $G$ , move-se no sentido contrário dos ponteiros do relógio.

### 3.7.5. A correção de śighra

A fonte é Van Brummelen, The mathematics of the heavens and the earth (2009).

Iremos determinar  $\sigma$ , a correção de *śighra*.

Na Ilustração 45, no triângulo retângulo  $GXS$ , consideremos que:

- *bhuja Sina* é o lado do triângulo retângulo que corresponde a *bhujaphala SX* ;

- *koti Cosa* é o outro lado do triângulo retângulo que corresponde a *kotiphala GX*;

- a unidade padrão é  $\frac{1}{360}$  do deferente;

- a circunferência do epiciclo *śighra* para Saturno, por exemplo, é dada no *Pañcasiddhāntikā* como  $c = 40$  dessas unidades.

Então:

- $bhujaphala = SX = \frac{c}{360} \cdot Sina$ ;

- $kotiphala = GX = \frac{c}{360} \cdot Cosa$ .

Assim a hipotenusa de *śighra* (ou seja do  $\Delta TSX$ ) é:

$$TS = \sqrt{TX^2 + SX^2} = \sqrt{(TG + GX)^2 + SX^2} = \sqrt{(R + kotiphala)^2 + bhujaphala^2}.$$

A partir daqui, a correção de *śighra* pode ser encontrada facilmente pois:

$$\sin \sigma = \frac{SX}{TS} = \frac{bhujaphala}{\text{hipotenusa } \acute{ś}ighra}.$$

### 3.7.6. A correção de manda

A fonte é Plofker (2008).

Observemos Ilustração 46 que mostra o Planeta, *M*, em duas posições diferentes.

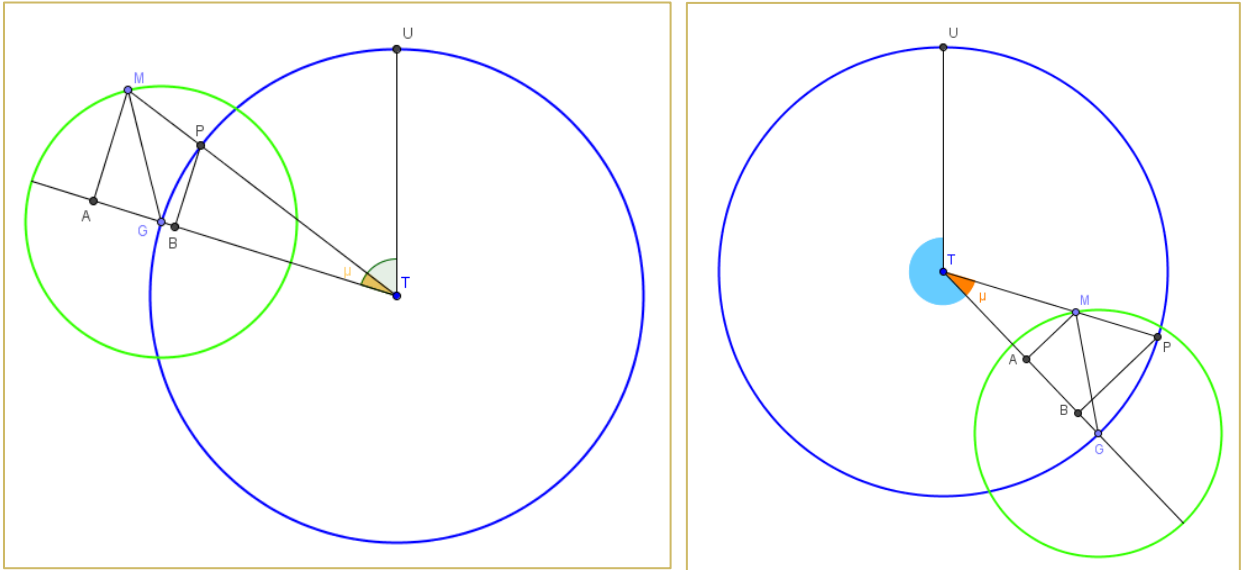


Ilustração 46 - Correção de Manda, com o planeta em duas posições diferentes

Neste caso pretendemos calcular  $\mu$ , a correção de *manda*. Vamos recorrer ao triângulo retângulo *TMA*:

- *bhuja Sin* $\mu$  é o lado do triângulo retângulo que corresponde a *bhujaphala*, *AM* ;
- *koti Cos* $\mu$  é o outro lado do triângulo retângulo que corresponde a *kotiphala*, *AT*;
- a unidade padrão é  $\frac{1}{360}$  do deferente.

Então:

$$\text{- } bhujaphala = AM = \frac{c}{360} \cdot \text{Sin}\mu;$$

$$\text{- } kotiphala = AT = \frac{c}{360} \cdot \text{Cos}\mu.$$



Agora usando:

$$- R = TG,$$

$$- TA = R \pm GA,$$

$$- \text{a hipotenusa de } manda \text{ (ou seja do } \Delta TMA) \text{ é } TM = \sqrt{MA^2 + AT^2},$$

- a semelhança dos triângulos  $TPB$  e  $TMA$ ,

obtemos:

$$\frac{PB}{TP} = \frac{AM}{TM} \Leftrightarrow \frac{PB}{R} = \frac{AM}{TM} \Leftrightarrow PB = R \cdot \frac{AM}{TM} \Leftrightarrow PB = R \cdot \sin \mu$$

e

$$PB = \sin^{-1} \mu,$$

que é a correção de *manda*.

### 3.7.7. A correção de Manda no GeoGebra

Na hiperligação [EquacaoPlanetaria.ggb](http://EquacaoPlanetaria.ggb) podemos ver uma animação da correção de *manda*. O seletor a animar é o do ângulo  $\alpha$ .

No Anexo a este trabalho encontra-se um *print screen* do ficheiro.

### 3.7.8. A localização do planeta

Os *siddhānta* dão um padrão de cálculo que envolve quatro passos para obter a localização do planeta.

- primeiro passo: calcular metade da correção de *śīghra*,
- segundo passo: calcular metade da correção de *manda*,
- terceiro passo: a partir dos valores obtidos, calcular metade da correção de *śīghra*,
- quarto passo: a partir dos valores obtidos, calcular metade da correção de *manda*.

Trata-se, assim, de um processo iterativo que permite obter um valor convergente para a posição real.

### 3.8. A origem da palavra seno

O nome *seno* vem do latim *sinus* que significa seio, volta, curva, cavidade. Muitas pessoas acreditam que este nome se deve ao fato de o gráfico da função correspondente ser bastante sinuoso.

Como vimos atrás, é o trabalho de Āryabhata – *Āryabathīya* – o primeiro trabalho a referir explicitamente o seno como função de um ângulo. Simultaneamente, este trabalho é o primeiro tratado indiano com matemática pura.

A corda metade era chamada *jiva* em sânscrito. Os astrónomos muçulmanos aprenderam a partir da tradição grega e indiana, nomeadamente no que respeita às tabelas de cordas metade. Por isso, foram buscar ao sânscrito o nome *jiva*. Em árabe e em hebreu, apenas se escrevem as consoantes de uma palavra, deixando-se as vogais para serem colocadas pelo leitor. A palavra invulgar do sânscrito *jiva* tem as mesmas consoantes que a vulgar palavra árabe *jaib*, que significa dobra, bolso (Aaboe, 1964), seio (Estrada et al, 2000). Daí não ser surpreendente que quando os trabalhos dos astrónomos árabes foram traduzidos para latim, os tradutores que sabiam árabe, e não sânscrito, lessem o título das tabelas de cordas metade como *jaib* e traduziram para a palavra latina dobra, bolso, seio que é *sinus*. Foi desta forma curiosa que surgiu a palavra seno. A tradução latina, originou, por fim, a palavra portuguesa seno que viria a ser utilizada, provavelmente, pela primeira vez por Pedro Nunes.

### 3.9. A origem da função cosseno

A fonte é Maor (1998).

A função cosseno que, hoje em dia tem igual importância que a função seno, apareceu primeiramente pela necessidade de calcular o seno do ângulo complementar. Āryabhata chamou-lhe *kotijyā* e usou-a de forma semelhante às antigas tabelas trigonométricas, tabulando na mesma coluna os senos dos ângulos de  $0^\circ$  a  $45^\circ$  e os cossenos dos ângulos complementares.



## Capítulo 4 – Trigonometria no Império Árabe

No mundo árabe medieval, a Trigonometria deixa de estar relacionada, maioritariamente, com a Astronomia e passa a ser fortemente influenciada pela religião.

Neste capítulo começa-se por ver em que contexto histórico se desenvolve a trigonometria árabe, os conceitos e linguagem associados. As seis funções trigonométricas são pela primeira vez definidas em conjunto e observam-se as vantagens do trabalho com o círculo unitário.

Os matemáticos/astrónomos escolhidos para este capítulo são novamente aqueles cujas ideias desenvolvidas são as mais surpreendentes e/ou dão um contributo importante para o desenvolvimento da Trigonometria Plana, tal como se conhece atualmente.

O primeiro matemático/astrónomo referido é Abū'l-Wafā que define tangente, cotangente, secante e cossecante deixando o contexto das sombras e dos gnómones. Com a associação do círculo unitário, obtém algumas fórmulas familiares.

Prossegue-se com Al-Bīrūnī que apresenta uma demonstração da fórmula da tangente.

Nasīr al-Dīn trata, pela primeira vez, da Trigonometria de forma independente da Astronomia, estabelece a Lei dos Senos para triângulos planos e dá uma ferramenta para os resolver.

Como se irá observar as tabelas trigonométricas apresentam-se com uma precisão crescente.

Al-Kāshī, no século *XIV* – *XV*, cria um método iterativo para obter um valor aproximado de  $\sin(1^\circ)$  que lhe permitiria obter uma tabela de senos que só seria superada 200 anos mais tarde.

O capítulo finda com aplicações da trigonometria plana: começa-se pelas aplicações à prática religiosa com a determinação da *qibla* – problema essencial na religião muçulmana; de seguida, uma aplicação na geografia e termina-se com a descrição de dois instrumentos astronómicos e trigonométricos muçulmanos.

### 4.1. Contextualização histórica

A fonte é Estrada et al (2000).

O Islamismo ou Islão é a religião monoteísta fundada por Maomé no século *VII* d.C.

O início do calendário islâmico dá-se quando, em 622, Maomé tem de fugir de Meca para Medina por ser alvo de perseguição. Maomé considerou que os princípios do islamismo lhe tinham sido revelados por um anjo enviado de Deus. A sua perseguição resultou do fato desse culto se opor ao politeísmo das classes ricas.

Maomé morre em 632.

Os sucessores de Maomé, que foram chamados de califas, por razões de ordem económica e religiosa lançaram-se em 633 numa guerra de conquista de territórios ao seu redor e foram alargando a sua presença. Exemplos dessas conquistas são a Síria, a Pérsia, a Ásia Central, Jerusalém, o Egipto, o Cáucaso e Índia. Em 711 os árabes invadem a Península Ibérica através do Estreito de Gibraltar.

Em 635 a capital do império árabe é estabelecida em Damasco, na Síria, mas em 722 o califa Al-Mansur transfere a capital para uma cidade por si fundada no Iraque, Bagdad.

Esta expansão teve as suas consequências ao nível da divulgação do islamismo e da língua árabe. Mas por outro lado, os árabes contatam com os centros culturais mais importantes na época: Bizâncio, Egipto, Síria, Pérsia.

Bagdad torna-se um importante centro cultural. Exemplo disso, é a fundação no reino de Harun al-Rashid da Biblioteca de Bagdad onde são arquivados manuscritos do Império Bizantino. Al-Mam'un também cria na mesma cidade uma Academia designada de Casa da Sabedoria, à qual pertenciam uma Biblioteca e um Observatório Astronómico.

Na Casa da Sabedoria juntam-se sábios e tradutores de várias nacionalidades e religiões que estudavam, traduziam e comentavam obras científicas gregas, persas, indianas e da Mesopotâmia.

## 4.2. A trigonometria no mundo árabe

A fonte é Katz (2010).

Um *siddhānta* indiano foi trazido para Bagdad nos finais do século *VIII* e traduzido por um árabe. Foi desta forma que os estudiosos islâmicos tomaram conhecimento dos conhecimentos de trigonometria indiana que, como sabemos, era inspirada no grego Hiparco. Também o *Almagesto* de Ptolomeu viria a ser traduzido para árabe. À semelhança dos indianos, os árabes absorvem os conhecimentos que encontram noutras culturas e apresentam novas ideias.

Tal como na Grécia e na Índia, também a trigonometria no mundo árabe estava ligada à Astronomia e da, mesma forma, os textos sobre trigonometria aparecem como capítulos de trabalhos astronómicos mais extensos. Estas obras são chamadas de *zīj*. Os *zīj*es incluíam os tópicos usuais de movimentos planetários, eclipses, ..., funções astronómicas relacionadas com a prática religiosa muçulmana, calendários e cálculos astrológicos.

De fato, os matemáticos árabes estavam particularmente interessados em usar a trigonometria para resolver triângulos esféricos pois a lei islâmica exigia que os muçulmanos se voltassem para Meca para orar. Assim era necessário determinar a direção e o sentido apropriados relativamente ao lugar que se ocupava no momento, e tal exigia um conhecimento extenso da solução desses triângulos sobre a esfera da Terra. A resolução de triângulos planos e esféricos era também necessário determinar os tempos corretos para as orações.

A partir do século *X*, começando com o trabalho de Abu Nasr Mansur (960-1036), os matemáticos árabes começam a trabalhar com a função seno de uma forma próxima à moderna. Alguns matemáticos começam a trabalhar, pela primeira vez, com a função seno num círculo de raio unitário,

embora este continuasse a ser definido para um arco de círculo em vez do ângulo ao centro subtendido por um arco.

### 4.3. As seis funções trigonométricas

A fonte é Berggren (1986).

Os autores do Mundo Islâmico estenderam os antigos métodos da trigonometria definindo e usando as funções trigonométricas como a seguir se apresenta. A Ilustração 47 deve ser tomada como referência.

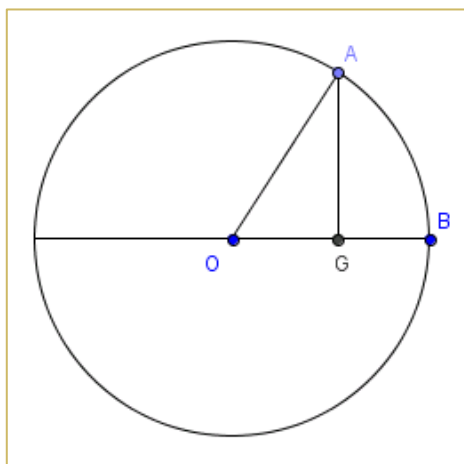


Ilustração 47 – Seno e Cosseno indiano

#### ✓ O Seno

O Seno (*al-jayb*) era definido para um arco  $AB$  de um círculo de centro  $O$  e raio  $R$ , como o comprimento de  $AG$ . Se  $Sin_r AB$  é o seno do arco  $AB$  num círculo de raio  $R$ , então esta função medieval está relacionada com:

- a função moderna, pela regra  $Sin_r AB = R \cdot \sin AB$  ;
- a função da corda de Ptolomeu, como  $Sin_r AB = \frac{1}{2} Crd (2AB)$ .

#### ✓ O Cosseno

Os autores muçulmanos descreveram o cosseno como um comprimento e não como uma razão. Se  $Cos_r AB$  designa a função cosseno para arcos menores que  $90^\circ$  num círculo de raio  $R$  então:

$$Cos_r AB = Sin_r (90^\circ - AB) ,$$

e este é o comprimento  $OG$ .

Esta função foi sempre chamada “o Seno do arco complementar” e não era tabulada separadamente.

✓ A Tangente e a Cotangente

As duas funções foram, originalmente, concebidas como comprimentos de certas sombras:

- a Tangente era a sombra de uma barra vertical de comprimento padrão colocada numa parede como mostra a Ilustração 48. O comprimento da sombra é dado por  $R \cdot \tan\theta$ , onde  $R$  é o comprimento da barra e  $\theta$  o ângulo de elevação do sol acima do horizonte.

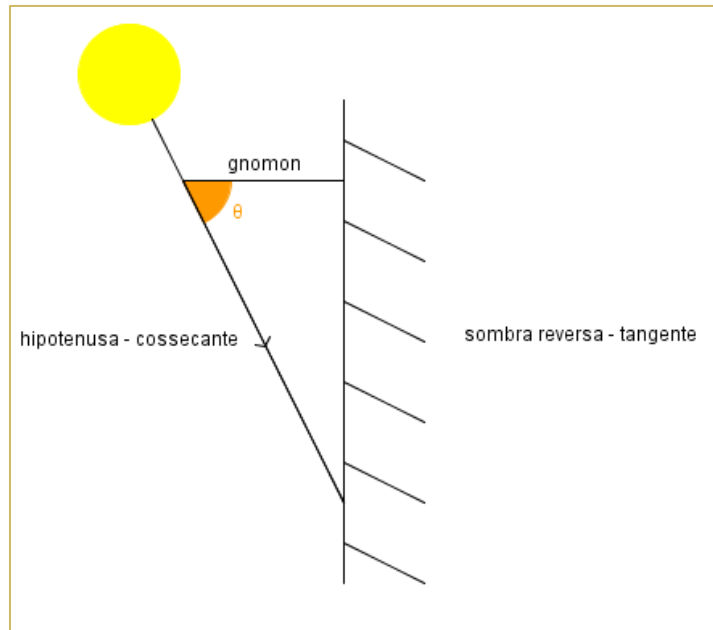


Ilustração 48 - A Tangente no contexto das sombras

- a Cotangente (*al-zill*) é sombra de uma barra vertical (*gnōmōn* em grego e *miqyās* em árabe) de comprimento padrão como mostra a Ilustração 49. O comprimento da sombra é dado por  $R \cdot \cot\theta$ , onde  $R$  é o comprimento da barra e  $\theta$  o ângulo de elevação do sol acima do horizonte.

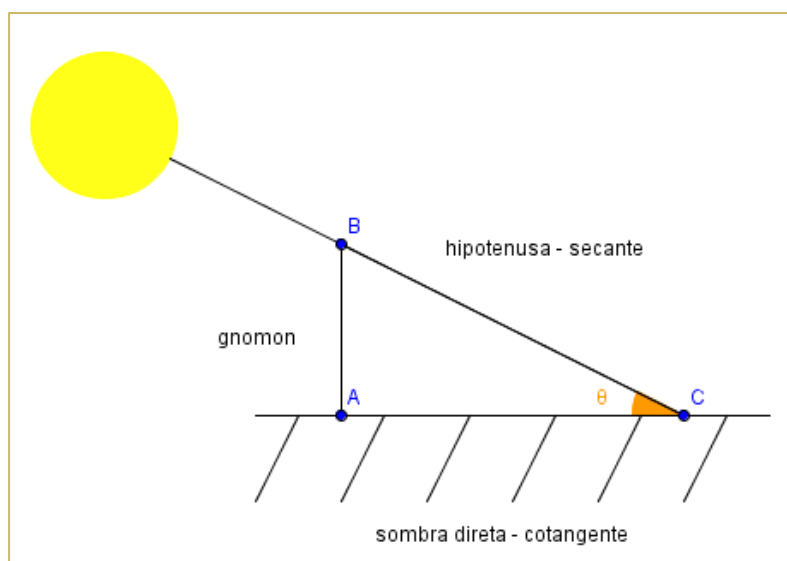


Ilustração 49 - A Cotangente no contexto das sombras

No século X as duas funções foram definidas, como poderemos encontrar no trabalho de Nasīr al-Dīn Tūsī. Na Ilustração 50,  $DB$  é a perpendicular a  $OB$ ,  $AG$  é a perpendicular a  $OB$ , e  $EK$  é a perpendicular a  $EO$ .

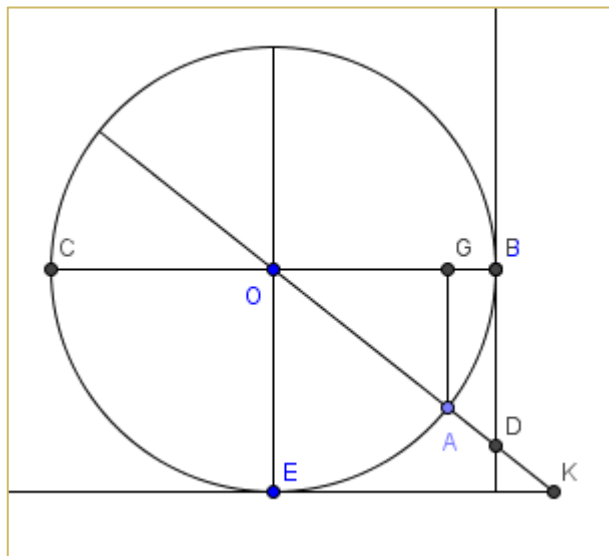


Ilustração 50 - Tangente e Cotangente definidas de forma geométrica

Então:

$$\tan_R AB = DB \text{ e } \cot_R AB = EK.$$

Os autores muçulmanos tabularam a função Tangente. A Cotangente, como era vista como a Tangente do complemento, não foi tabulada separadamente.

Nasīr al-Dīn estabelece as seguintes relações:

$$-\frac{\tan AB}{R} = \frac{\sin AB}{\cos AB} \text{ (usando as relações anteriores e o critério AA aplicado aos triângulos } OAG \text{ e } ODB);$$

Note-se que quando  $R = 1$ , obtém-se a relação familiar  $\tan AB = \frac{\sin AB}{\cos AB}$ .

$$-\frac{\tan AB}{R} = \frac{R}{\cot AB} \text{ (usando as relações anteriores e o critério AA aplicado aos triângulos } ODB \text{ e } KOE).$$

Note-se que quando  $R = 1$ , obtém-se a relação familiar  $\tan AB = \frac{1}{\cos AB}$ .

✓ A Secante e a Cossecante

Raramente estas funções eram tabuladas, mas Nasīr al-Dīn define-as, com referência à Ilustração 50, da forma que se segue:

-  $\sec AB = OD$ , designada pelos escritores árabes como hipotenusa da sombra;

-  $\csc AB = KO$ , designada pelos escritores árabes como hipotenusa da sombra reversa (*qutr al-zill*).



Estes nomes podem ser explicados a partir da Ilustração 48 e Ilustração 49 e pelo fato de a “hipotenusa” se referir ao segmento que une a extremidade do gnómon até ao fim da sombra.

A Secante é a hipotenusa na Ilustração 48 e a Cossecante é a hipotenusa na Ilustração 49.

Nasir al-Din observa que os triângulos  $DBO$  e  $AGO$  são semelhantes, pelo critério  $AA$ , e assim:

$$\frac{DB}{DO} = \frac{AG}{AO'}$$

ou seja:

$$\frac{\tan AB}{\sec AB} = \frac{\sin AB}{R}.$$

Os árabes passam, assim, a trabalhar com um sistema trigonométrico baseado em seis funções, que hoje em dia usamos, e que tornaram a trigonometria mais simples e útil.

#### 4.4. O Círculo Unitário

Durante algum tempo os matemáticos árabes oscilaram entre o Almagesto de Ptolomeu e a Trigonometria de *jiva*. Foram vários os valores usados para  $R$ , como 60 ou 150.

Vários autores passam, entretanto, a usar  $R = 1$ .

- Al-Battānī (850-929);
- Abū'l-Wafā (940-998);
- Al-Bīrūnī (973-1055).

#### 4.5. Abū'l-Wafā (940-998)

A fonte é Van Brummelen, *The mathematics of the heavens and the earth* (2009).

Abū'l-Wafā foi um dos maiores astrónomos e matemáticos da Idade Média e que trouxe contribuições significativas à astronomia observacional. As suas descobertas na trigonometria abriram o caminho para cálculos astronómicos mais precisos.

Abū'l-Wafā escreveu o Almagesto. Esta obra não era um trabalho matemático, pois tinha como objetivo o estudo da Astronomia, mas é aí que introduz pela primeira vez a função tangente. Constrói também uma tabela de senos, usando um novo método que trouxe mais precisão às tabelas anteriores. Esta tabela apresenta intervalos de 15' e quatro casas sexagesimais. No capítulo seis desta obra, Abū'l-Wafā define tangente, cotangente, secante e cossecante deixando o contexto das sombras e dos gnómones.

A figura que usa como referência é a Ilustração 51:

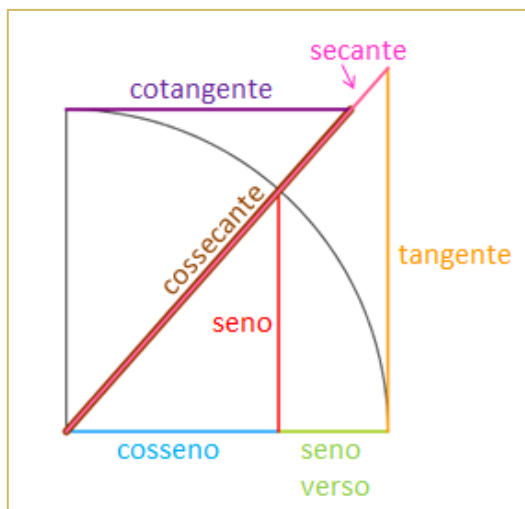


Ilustração 51 - As seis funções trigonométricas

Abū'l-Wafā estabelece várias relações simples entre as várias funções, usando  $R = 1$ :

-  $\sec \theta = \sqrt{1 + (\tan \theta)^2}$  (usando o Teorema de Pitágoras e um círculo de raio unitário);

-  $\csc \theta = \sqrt{1 + (\cot \theta)^2}$  (usando o Teorema de Pitágoras e um círculo de raio unitário);

-  $\frac{\tan \theta}{1} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  (usando a semelhança de triângulos);

-  $\frac{\cot \theta}{1} = \frac{1}{\tan \theta} \Leftrightarrow \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$  (usando a semelhança de triângulos);

-  $\frac{\sec \theta}{1} = \frac{1}{\cos \theta} \Leftrightarrow \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$  (usando a semelhança de triângulos);

-  $\frac{\csc \theta}{1} = \frac{1}{\sin \theta} \Leftrightarrow \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$  (usando a semelhança de triângulos).

As vantagens da inclusão destas funções nas tabelas trigonométricas não foram apreciadas pelos colegas de Abū'l-Wafā. Contudo as suas vantagens ao nível da trigonometria esférica, que podiam ser observadas no Almagesto, não podiam ser ignoradas.

A partir dos fins do século X, com os trabalhos deste matemático, o círculo unitário passa a ser usado mais frequentemente.

Como vemos, as funções trigonométricas estão cada vez mais próximas das que hoje usamos, embora continuassem a ser funções de um arco e não de um ângulo.

#### 4.6. Al-Bīrūnī (973-1055)

A fonte é Katz (2010) e Site Web History of Trigonometry (1997-2012).

Al-Bīrūnī nasceu em Khwarizm, perto da cidade de Biruni, no Uzbequistão. Começou os seus estudos científicos, ainda jovem, com a orientação de Abū Nasr Mansūr ibn Irāq, que era um astrónomo importante na altura. Em 997 combinou com Abu'l-Wafā observar o mesmo eclipse lunar, estando Al-Bīrūnī em Khwarizm e Abu'l-Wafā em Bagdad. O intervalo de tempo entre as duas ocorrências iria permitir obter a diferença de longitude entre os dois lugares. Em 1017, Khwarizm foi conquistada pelo Sultão Mahmūd de Ghazna, que se situa no Afeganistão, e que em breve governaria um império tão vasto que incluía partes do norte da Índia. Al-Bīrūnī foi para a corte do Sultão e posteriormente foi até à Índia onde escreveu uma obra que passava por todos os aspetos da cultura indiana. Al-Bīrūnī escreveu mais de 140 trabalhos, a maioria dos quais sobre matemática, astronomia e geografia.

Entre os seus trabalhos destacamos o Tratado Exaustivo das Sombras.



Ilustração 52 - Al-Bīrūnī num selo do Irão<sup>11</sup>

Salienta-se também a obra de Al-Bīrūnī, Chaves para a Ciência da Astronomia. Tem mais de 1000 páginas e contém muitos desenvolvimentos da trigonometria. Entre os muitos teoremas, Al-Bīrūnī produz uma demonstração da fórmula da tangente que passamos a ver.

<sup>11</sup> Fonte: < [http://lostislamichistory.com/wp-content/uploads/2013/04/Biruni\\_Iranian.jpg](http://lostislamichistory.com/wp-content/uploads/2013/04/Biruni_Iranian.jpg) > 8/07/2013



#### 4.7. Nasīr al-Dīn Tusī (1201-1274)

A fonte é o Site Web Nasir al-Din al-Tusi (2013).

Nasīr al-Dīn Al-Tusī foi um dos maiores estudiosos de seu tempo e uma das figuras mais influentes na história intelectual islâmica. Foi cientista, matemático, astrônomo, filósofo e teólogo. Criou modelos matemáticos engenhosos para serem usados na astronomia. Escreveu cerca de 150 obras em árabe e persa.

Na matemática, al-Tusī foi pioneiro, tratando a trigonometria como uma nova disciplina matemática, independente da astronomia.

Nasīr al-Dīn, na sua obra Sobre a Figura do Setor, introduz a Lei dos Senos para triângulos planos e dá uma ferramenta para os resolver. Fontes há (Joseph, 2009) que indicam que a atribuição da Lei dos Senos a al-Tusī está incorreta, dado sido descoberta quase em simultâneo por Nasir ibn Iraq e Abū'l-Wafā.

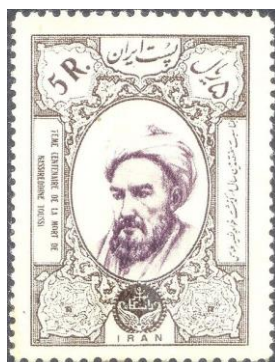


Ilustração 54 - Al-Tusī num selo iraniano pelo 700º aniversário da sua morte<sup>12</sup>

Recorrendo a Bergreen (1986), iremos ver como Al-Tusī:

- prova a Lei dos Senos;
- aplica a Lei para encontrar elementos desconhecidos de triângulos a partir de elementos conhecidos.

<sup>12</sup> Fonte: < [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Nasir\\_al-Din\\_Tusi.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Nasir_al-Din_Tusi.jpg) > 1/06/2013

### 4.7.1. A Lei dos Senos

**Lei dos Senos:** Se  $ABC$  é um triângulo qualquer então  $\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}$ .

Nota: considera-se que  $c$  é a medida do lado oposto ao ângulo em  $C$ .

**Demonstração:**

A Ilustração 55 mostra o caso em que um dos ângulos  $B$  ou  $C$  é obtuso.

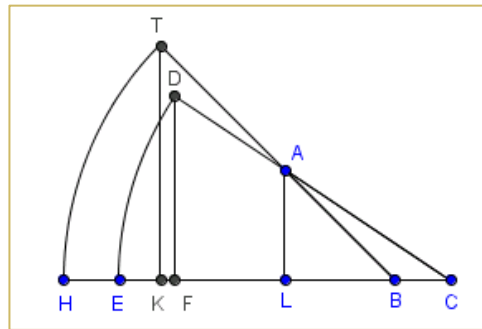


Ilustração 55 - Lei dos Senos: no triângulo  $ABC$  um dos ângulos é obtuso

A Ilustração 56 mostra o caso em que nenhum dos ângulos  $B$  ou  $C$  é obtuso, e por isso um deles é agudo.

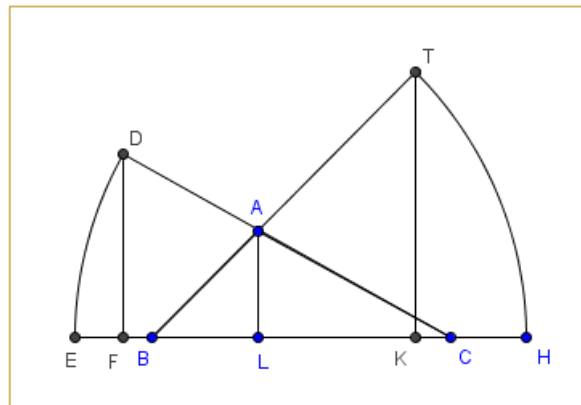


Ilustração 56 - Lei dos Senos: no triângulo  $ABC$  os ângulos  $B$  e  $C$  são agudos

Em qualquer dos casos, começar por prolongar  $CA$  para  $D$  e  $BA$  para  $T$  de tal forma que  $CD$  e  $BT$  tenham comprimento igual a 60 unidades.

Com centro em  $B$  e  $C$  desenham-se os arcos circulares  $TH$  e  $DE$ . Se baixarmos perpendiculares  $TK$  e  $DF$  sobre a base  $BC$  então:

$$\sin B = TK \text{ e } \sin C = DF.$$

De seguida traçamos  $AL$  perpendicular a  $BC$ .

Como os triângulos  $ABL$  e  $TBK$  são semelhantes pelo critério  $AA$  vem:  $\frac{AB}{AL} = \frac{TB}{TK}$ .

Como os triângulos  $ACL$  e  $DCF$  são semelhantes pelo critério  $AA$  vem:  $\frac{AL}{AC} = \frac{DF}{DC}$ .

Como  $DC = 60 = TB$ , se multiplicarmos ambos os membros das proporções obtemos:

$$\frac{AB}{AL} \cdot \frac{AL}{AC} = \frac{TB}{TK} \cdot \frac{DF}{DC} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{60}{TK} \cdot \frac{DF}{60} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{DF}{TK} \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B},$$

o que prova a Lei dos Senos.

Como a função seno de Nasīr al-Dīn é 60 vezes a função moderna, o teorema enunciado funciona para da mesma forma para a função moderna.

Podemos reescrever o teorema como  $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$ , que é a forma em que usamos hoje em dia, e que pode ser recordada facilmente como: num dado triângulo a razão entre qualquer lado e o seno do ângulo oposto é constante.

## 4.7.2. Resolução de triângulos

Nasīr al-Dīn usa este teorema para resolver todos os triângulos possíveis, sistematicamente.

A figura que se irá usar é:

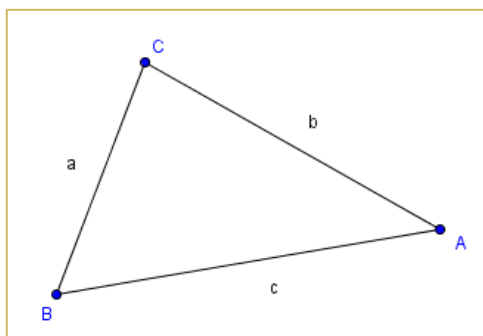


Ilustração 57 - Resolução de triângulos, I

**Caso 1:** São dados dois ângulos e um lado.

Se dois ângulos,  $A$  e  $B$  são conhecidos então  $C = 180^\circ - (A + B)$  também é conhecido. Tem de ser dado um lado, pois apenas com o conhecimento dos ângulos não é possível determinar qualquer um dos lados.

Como todos os ângulos são conhecidos, vamos considerar que  $c$  é o lado conhecido, sem perda de generalidade. Então, pela Lei dos Senos vem:

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} \text{ e } \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

Em cada proporção três dos quatro termos são conhecidos e, por isso, os termos restantes  $a$  e  $b$  podem ser calculados.

**Caso 2:** São dados um ângulo e dois lados.

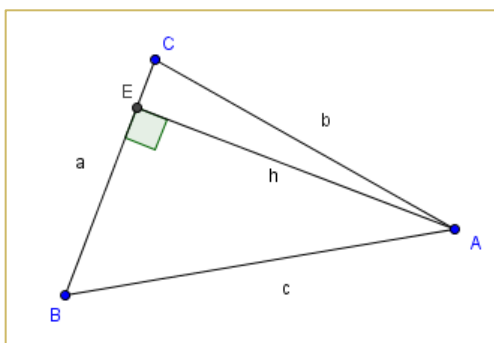
Se apenas um ângulo é conhecido então dois lados têm de ser conhecidos.

**2.1.** Se um destes lados é oposto ao ângulo conhecido então, sem perda de generalidade, os valores conhecidos são  $c$ ,  $C$  e  $a$ . Então  $A$  é determinado usando:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A},$$

e como estes dois lados são conhecidos, voltamos ao caso anterior, pois três dos quatro termos são conhecidos.

**2.2.** Por outro lado se nenhum lado é oposto ao ângulo conhecido, então, sem perda de generalidade, os valores conhecidos são  $B$ ,  $a$ ,  $c$ .



**Ilustração 58 - Resolução de triângulos, II**

Neste caso considera-se na Ilustração 58 a perpendicular a  $a$  traçada a partir de  $A$ ,  $AE$ . No triângulo retângulo  $BEA$ , o lado  $c$  e o ângulo  $B$  são conhecidos e o lado  $AE$  pode ser determinado usando:

$$\frac{h}{c} = \frac{\sin B}{\sin 90^\circ} \Leftrightarrow h = \frac{c \cdot \sin B}{\sin 90^\circ}.$$

Então:

$$EB = \sqrt{BA^2 - AE^2} \text{ e } CE = a - EB.$$



E, por isso, no triângulo  $AEC$  os dois lados  $AE$  e  $EC$  são conhecidos. Desta forma, o lado que resta  $AC = b$  pode ser calculado usando o Teorema de Pitágoras. Usando uma tabela de senos o ângulo  $C$  pode ser calculado.

Então  $A = 180^\circ - (B + C)$  e todos os elementos do triângulo estão determinados.

**Caso 3:** São dados três lados.

Os três lados são conhecidos.

Se nenhum dos ângulos é conhecido, então os três lados  $a, b$  e  $c$  são dados. Recorrendo à figura anterior, Nasīr al-Dīn explica como calcular a perpendicular  $h$ , traçada de  $A$  para  $a$ .

Nasīr al-Dīn usa “a regra usual” para calcular a perpendicular e que pode ser encontrada no *Almagesto* de Ptolomeu, *Livro VI*, 17:

$$BE = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$

e então  $h = \sqrt{c^2 - BE^2}$ .

Como  $EC = BC - BE$ , nos dois triângulos retângulos  $BEA$  e  $CEA$  os três lados de ambos os triângulos são conhecidos. Para obtermos os ângulos  $B$  ou  $C$  podemos usar uma tabela de senos.

Obtemos o elemento em falta fazendo  $A = 180^\circ - (B + C)$ .

## 4.8. Tabelas trigonométricas: cálculo e interpolação

A fonte é Berggren (1986).

Uma aplicação bem-sucedida das regras que Nasīr al-Dīn dá para encontrar valores desconhecidos do triângulo a partir de valores conhecidos, depende não só do conhecimento de teoremas mas também de boas tabelas trigonométricas e como devem ser utilizadas.

De fato, tabelas rígidas eram necessárias não só para o estudo de ciências exatas como a astronomia e a geografia mas também para investigar questões como o raio da circunferência de um círculo ou o seu diâmetro.

No cálculo dessas tabelas, os cientistas árabes foram mais longe que os seus antecessores e a Tabela 6 mostra a precisão crescente na construção de tabelas trigonométricas, tal como pode ser encontrado nos *zīj*es de alguns dos maiores cientistas.

Tabela 6 - Tabelas trigonométricas árabes

| Ano  | Autoria            | Função(ões) | Intervalos | Precisão (nº de casas decimais) |
|------|--------------------|-------------|------------|---------------------------------|
| 850  | Habash al-Hāsib    | Sin, Tan    | 1°         | 3                               |
| 900  | Al-Battānī         | Sin         | ½°         | 3                               |
| 1000 | Kūshyār ibn Labbān | Sin, Tan    | 1', 1°     | 3                               |
| 1030 | Al-Bīrūnī          | Sin, Tan    | 15', 1°    | 4                               |
| 1440 | Ulūgh Beg          | Sin, Tan    | 1'         | 5                               |

A seguir temos um extrato de uma tabela de senos de Al-Battānī:

| جدول الاوتار المصنفة والقسي المتفاضلة بنصف جزء<br>Tabulae sinuum et arcuum intervallo dimidii gradus descriptorum. |                           |  |                           |  |                           |
|--|---------------------------|--|---------------------------|--|---------------------------|
| القسي المتفاضلة<br>بنصف جزء<br>Arcus intervallo<br>dimidii gradus.   | الاوتار المصنفة<br>Sinus. | القسي المتفاضلة<br>بنصف جزء<br>Arcus intervallo<br>dimidii gradus. | الاوتار المصنفة<br>Sinus. | القسي المتفاضلة<br>بنصف جزء<br>Arcus intervallo<br>dimidii gradus. | الاوتار المصنفة<br>Sinus. |
| 0° 30' 179° 30'  | 0° 31' 25''               | 15° 30' 164° 30'   | 16° 2' 4''                | 30° 30' 149° 30'   | 30° 27' 8''               |
| 1 0 179 0  | 1 2 50                    | 16 0 164 0   | 16 32 18                  | 31 0 149 0   | 30 54 8                   |
| 1 30 178 30  | 1 34 14                   | 16 30 163 30   | 17 2 27                   | 31 30 148 30   | 31 21 0                   |
| 2 0 178 0  | 2 5 38                    | 17 0 163 0   | 17 32 33                  | 32 0 148 0   | 31 47 43                  |
| 2 30 177 30  | 2 37 2                    | 17 30 162 30   | 18 2 32                   | 32 30 147 30   | 32 14 17                  |
| 3 0 177 0  | 3 8 25                    | 18 0 162 0   | 18 32 27                  | 33 0 147 0   | 32 40 42                  |
| 3 30 176 30  | 3 39 46                   | 18 30 161 30   | 19 2 18                   | 33 30 146 30   | 33 6 58                   |

Ilustração 59 - Extrato da tabela de senos de Al-Battānī<sup>13</sup>

Consideremos a tabela de Ulūgh Beg. Eram necessárias 60 entradas para cada um dos 90°, o que dá um total de 5400 entradas a serem calculadas. Por outro lado, a precisão da tabela irá depender das precisão das entradas base, como sejam o valor de  $\sin(1^\circ)$ , ou outros valores básicos do Seno. Também irá depender das fórmulas trigonométricas que permitem obter os Senos para todos os valores inteiros de  $n^\circ$ . A fórmula do ângulo metade permite obter intervalos de ½° e ¼°. Para valores mais pequenos foi usada interpolação. Iremos observar um desses procedimentos com Al-Kāshī.

<sup>13</sup> Fonte: <<http://www.iphogenidijk.nl/talks/naota.pdf>> 1/07/2013

## 4.9. Al-Kāshī (1380-1429)

A fontes são o Site Web Al-Kāshī (2013) e Van Brummelen, The mathematics of the heavens and the earth (2009).

O astrónomo iraniano Al-Kāshī foi o maior cientista computacional do seu tempo. Os seus feitos ainda estão a ser descobertos hoje em dia.



Ilustração 60 - Al-Kāshī num selo iraniano<sup>14</sup>

Na sua terceira obra-prima, *Risāla al-watar wa'l-jaib*, Tratado sobre a Corda e Seno, o iraniano Al-Kāshī calcula o seno de  $1^\circ$  com 10 casas decimais corretas. Esta precisão era essencial para o rigor das tabelas astronómicas. Não se sabe se foi Al-Kāshī que completou este tratado ou se foi completado após a sua morte. A obra na sua forma original está perdida. Contudo como o seu método provocou várias reações e variantes, pode ser reconstruído com alguma precisão.

Antes de avançarmos, recordemos o método usado por Ptolomeu no seu *Almagesto* na determinação de  $crd(1^\circ)$ . Ptolomeu usa a desigualdade:

$$\frac{2}{3} crd\left(\frac{3}{2}^\circ\right) < crd(1^\circ) < \frac{4}{3} crd\left(\frac{4}{3}^\circ\right),$$

o que lhe deu uma aproximação para  $crd(1^\circ)$  correta até duas casas sexagesimais, pois ambos os extremos da desigualdade se iniciam com 1;2,50. O método tem uma limitação inerente e que tem a ver com esses extremos: sem novos extremos não há possibilidade de melhorar a precisão.

<sup>14</sup> Fonte: <[http://muslimmedianetwork.com/mmn/windows-live-pictures/MuslimScientistsandThinkersJamshidalKash\\_A87C/Scialkashi1.jpg](http://muslimmedianetwork.com/mmn/windows-live-pictures/MuslimScientistsandThinkersJamshidalKash_A87C/Scialkashi1.jpg)> 10/07/2013

### 4.9.1. O método de Al-Kāshī

A fonte é Aaboe (1954).

O método de Al-Kāshī, descoberto no início do século XV dá aproximações de  $\sin(1^\circ)$  e baseia-se em duas relações:

$$(1) \sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 0;0,4 (\sin\theta)^3, \quad \text{que com } \theta = 1^\circ \text{ fica:} \\ \sin(3) = 3\sin(1^\circ) - 0;0,4 (\sin 1^\circ)^3$$

A forma moderna desta relação é dada por  $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4(\sin\theta)^3$ .

Esta fórmula pode ser obtida a partir da fórmula da soma pois:

$$\begin{aligned} \sin(3a) &= \sin(a + 2a) = \sin(a) \cdot \cos(2a) + \cos(a) \cdot \sin(2a) \\ &= \sin(a) \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2(a)) + \cos(a) \cdot (2 \cdot \sin(a) \cdot \cos(a)) \\ &= \sin(a) \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2(a)) + 2 \cdot \sin(a) \cdot \cos^2(a) \\ &= \sin(a) - 2 \cdot \sin^3(a) + 2 \cdot \sin(a) \cdot (1 - \sin^2(a)) \\ &= \sin(a) - 2 \cdot \sin^3(a) + 2 \cdot \sin(a) - 2 \cdot \sin^3(a). \\ &= 3 \cdot \sin(a) - 4 \cdot \sin^3(a). \end{aligned}$$

$$(2) \sin(3^\circ) = 3;8,24,33,59,34,28,15, \text{ que é um valor correto até às casas sexagesimais apresentadas.}$$

O valor de  $\sin(3^\circ)$  pode ser determinado com tantas casas decimais quantas necessárias, pois os procedimentos euclidianos permitem encontrar os valores de  $\sin(72^\circ)$  e  $\sin(60^\circ)$  a partir das construções dos lados de um pentágono regular e de um triângulo equilátero inscritos num círculo. Estas construções foram traduzidas para equações algébricas, exigindo nada mais que as soluções de equações de 1º ou 2º grau, que já observamos em Ptolomeu. As soluções destas equações podem ser expressas, no pior dos casos, em termos de raízes quadradas que podem ser aproximadas com a precisão desejada. A partir daqui entra a fórmula do seno da diferença de dois arcos que observamos com Abū'l-Wafā no século X:

$$\sin(12^\circ) = \sin(72^\circ - 60^\circ).$$

Pela fórmula do ângulo metade, usada repetidamente obtemos  $\sin(6^\circ)$  e  $\sin(3^\circ)$ .

Segue-se o uso da relação (1). Resolvendo esta equação de 3º grau obtemos o valor de  $\sin(1^\circ)$  fazendo  $\theta = 1^\circ$  e  $x = \sin(1^\circ)$ :

$$\sin(3^\circ) = 3x - 0;04x^3.$$

O problema seguinte é o de determinar a solução desta equação sem a resolver analiticamente. Al-Kāshī começa isolando o termo em  $x$ :

$$\begin{aligned} \sin(3^\circ) = 3x - 0;04x^3 &\Leftrightarrow x = \frac{\sin(3^\circ) - 0;04x^3}{3} \Leftrightarrow x = \frac{900\sin(3^\circ) - 1x^3}{2700} \Leftrightarrow \\ x &= \frac{x^3 + 900 \cdot 3;8,24,33,59,34,28,15}{2700} \Leftrightarrow x = \frac{x^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0}. \end{aligned}$$

Já sabemos de estimativas anteriores que  $x = 1; a, b, c, \dots$  o que faz com que o termo do numerador  $x^3$  seja bastante mais pequeno que 47,6;8, .... Assim, podemos escrever  $x = 1; a, b, c, d, \dots$  sendo  $a, b, c, d \dots$  as casas sexagesimais da raiz da equação e obtemos:

$$1; a, b, c, \dots = \frac{(1; a, b, c, \dots)^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0}.$$

Subtraindo 1 a ambos os membros:

$$\begin{aligned} 1; a, b, c, \dots - 1 &= \frac{(1; a, b, c, \dots)^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0} - 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0; a, b, c, \dots &= \frac{(1; a, b, c, \dots)^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45 - 2700}{45,0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0; a, b, c, \dots &= \frac{(1; a, b, c, \dots)^3 + 2,6;8,29,53,37,3,45, \dots}{45,0}. \end{aligned}$$

Como sabemos que o valor de  $x$  é um valor muito próximo de 1:

$$\frac{(1)^3 + 2,6;8,29,53,37,3,45, \dots}{45,0} = 0;2,49,31, \dots$$

Obtemos  $a = 2$ .

Note-se que o 2º membro não depende de  $a$ . De fato, como sabemos que  $x$  está próximo de 1 então também o seu cubo irá estar. Como quer o denominador, 45,0, quer termo do numerador 47,6;8,29,53,37,3,45 são muito maiores que  $x$ ,  $x$  quase não interfere no resultado. Assim o 2º membro não irá depender de  $a$ . Podemos confirmar isto fazendo:

$$x = 1, \frac{1^3 + 2,6;8,29, \dots}{45,0} = 0;2,49, \dots$$

e

$$x = 2, \frac{2^3 + 2,6;8,29, \dots}{45,0} = 0;2,58, \dots$$

Para chegarmos à próxima casa sexagesimal repetimos o processo. Vamos considerar  $x = 1;2$  e subtraímos  $1;2$  de ambos os membros. Obtemos:

$$1;2, b, c, \dots - 1;2 = \frac{(1;2, b, c, \dots)^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0} - 1;2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0;0, b, c, \dots = \frac{(1;2, b, c, \dots)^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0} - 1;2,$$

o que nos dá a casa sexagesimal seguinte. Assim  $b = 49$ . De novo o segundo membro não depende de  $b$  pelas mesmas razões que foram apresentadas para  $a$ .

Al-Kāshī continua o processo até 10 casas sexagesimais, concluindo que:

$$\sin(1^\circ) = 1;2,49,43,11,14,44,16,19,16.$$

Todos os valores estão corretos à exceção dos últimos dois – que deveriam ser 26,18. Contudo o valor é muito bom para os cálculos que eram necessários fazer.

As ferramentas que Al-Kāshī usa – a fórmula do ângulo triplo e a iteração - estavam disponíveis há séculos. Al-Kāshī foi o primeiro a juntar estas duas ideias usando a linguagem da álgebra.

Obteve-se assim uma tabela monumental de senos de último grito com cinco casas sexagesimais para cada minuto do arco (e que vai até às seis casas sexagesimais para valores entre  $87^\circ$  e  $90^\circ$ ). Esta tabela só seria superada por Rheticus quase 200 anos mais tarde.

#### 4.9.2. Al-Kāshī à luz atual

Al-Kāshī usa um método para aproximar  $\sin(1^\circ)$  que produz um resultado tão próximo do valor real quanto desejado.

O método que ele utiliza é um método iterativo: inicia-se com conjunto de dados e uma aproximação, que geralmente é grosseira mas está próxima do valor real. De seguida, com o conjunto de dados, o valor inicial e com um determinado procedimento chega-se a um número. Este número é então tomado como a nova aproximação e com o conjunto de dados, usando o mesmo procedimento realiza-se uma segunda ronda de cálculos. Estes cálculos geram uma nova aproximação e com o conjunto de dados é utilizado o procedimento e por aí adiante. Se o procedimento for eficiente irá produzir resultados que se irão aproximar cada vez mais do valor procurado e que resolve o problema. Neste caso, o procedimento converge e o algoritmo é eficiente.

O procedimento de Al-Kāshī produz resultados que sucessivamente se aproximam do valor de  $\sin(1^\circ)$ . O método hoje em dia tem o nome de Método de Iteração do Ponto Fixo.

Al-Kāshī não fornece uma prova da convergência do seu algoritmo. O seu interesse estava em encontrar métodos que fornecessem soluções para problemas importantes na astronomia.

À luz atual o que faz Al-Kāshī? Al-Kāshī considera a função  $g(x) = \frac{x^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0}$  e faz  $x = g(x)$ . De seguida realiza a iteração  $x_{n+1} = g(x_n)$ .

Note-se que  $g(x)$  cresce lentamente perto de 1.

### 4.9.3. Al-Kāshī e o GeoGebra

No ficheiro [Al-Kashi1.ggb](#) do GeoGebra poderemos ver quão rápida é a convergência da função  $g(x)$  para  $\sin(1^\circ)$ . De fato à 4ª iteração já temos um valor que difere de 13 casas decimais do valor real!

No Anexo a este trabalho encontra-se um *print screen* do ficheiro.

## 4.10. Aplicações à prática religiosa: a determinação da *Quibla*

A fonte é Van Brummelen, *The mathematics of the heavens and the earth* (2009).

Como vimos a trigonometria amadureceu consideravelmente no Islão Medieval.

A ampliação para as seis funções modernas e a descoberta dos teoremas associados, tanto no plano com na esfera, transformaram a trigonometria numa ferramenta poderosa e sistemática a ser usada na astronomia matemática.

De fato, a trigonometria era o suporte da astronomia que por sua vez lidava com vários aspetos da prática ritual islâmica.

Um desses aspetos são as orações diárias que requerem matemática por duas razões. Os cinco momentos do dia em que se realizam essas orações são definidos de acordo com o comprimento das sombras e, portanto, pela altitude do sol. Por outro lado, também é crucial determinar a direção para a qual o muçulmano se deve virar enquanto está a rezar: essa direção é a de Ka'ba em Meca que se trata de um edifício que representa o centro geográfico da religião. A direção sagrada, a *quibla*, tem um significado mais amplo pois várias atividades como a recitação do Corão, rituais com animais, funções corporais devem ser realizadas na direção da *quibla* ou na sua perpendicular. Como a *quibla* gerou muita atenção entre os cientistas muçulmanos, vai ser alvo de tratamento neste trabalho.

Nem sempre a matemática foi usada para determinar a direção da *quibla*. As paredes das orações das mesquitas estavam orientadas de acordo com várias tradições e, por vezes, apontavam vagamente em direção a Meca. Contudo esta situação não desencorajou o interesse científico na questão e seria a trigonometria que viria dar um grande contributo à questão.

O problema não é exclusivamente matemático dado que requer o conhecimento das coordenadas de Meca e do observador.

Considere-se a Ilustração 62:

- $O$  é o observador com latitude  $\phi_O$  e longitude  $L_O$ ,
- $M$  representa Meca com latitude  $\phi_M$  e longitude  $L_M$ ,
- o objetivo é encontrar  $q$ , a *qibla*.

A parte mais difícil desta tarefa é encontrar a diferença na longitude  $\Delta L = L_O - L_M$ . Na teoria isto poderia ser feito observando eclipses lunares, simultaneamente, nas duas localidades e registar a diferença no tempo local. Mas na prática não é simples fazer a determinação rigorosa do tempo local ou dos momentos exatos em que as fases do eclipse solar se iniciam.

Algumas das soluções mais antigas para a *qibla* são aproximadas. A solução mais popular é reportada a Al-Battānī e foi usada até ao século *XIX*. Dada a simplicidade deste método, foi muitas vezes criticado por astrónomos interessados numa solução mais precisa. Entre eles encontramos Al-Bīrūnī.

#### 4.10.1. O método de Al-Battānī

Considerem-se a: Ilustração 61, Ilustração 62 e Ilustração 63.

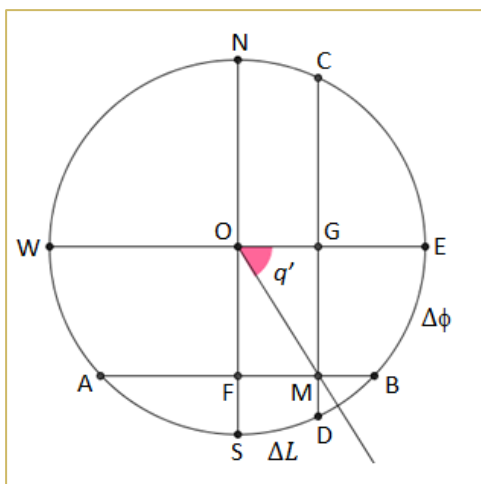


Ilustração 61 - Método de Al-Battani num modelo bidimensional

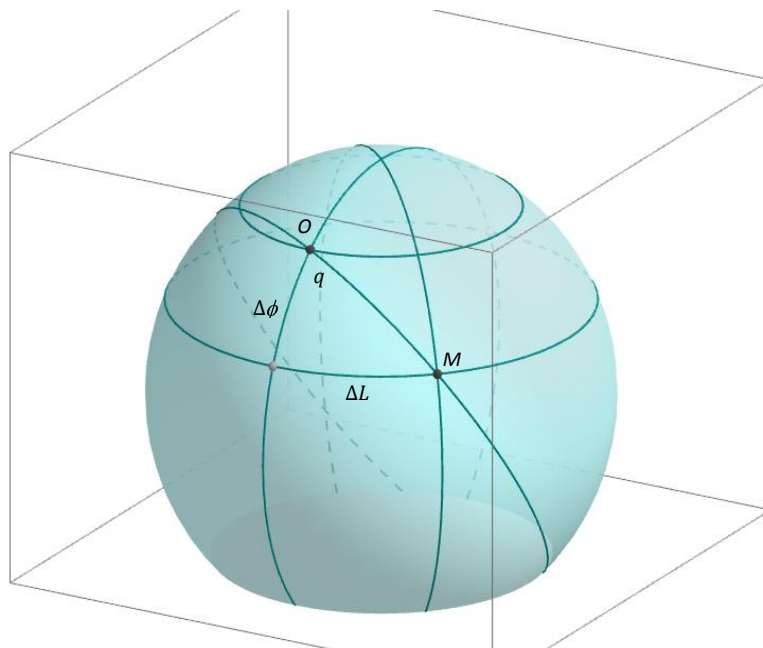


Ilustração 62 - Qibla, método de Al-Battānī num modelo tridimensional





Ilustração 63 - Diagrama utilizado para determinar a quibla recorrendo a um método aproximado.

O diagrama foi retirado de King (1999).

Na Ilustração 61:

- é medida a diferença na latitude,  $\Delta\phi$ , ao longo da semi-circunferência  $EW$ , que corresponde ao arco  $EB$ ,
- $AB$  é a corda paralela ao diâmetro  $EW$ ,
- de maneira análoga, é medido  $\Delta L$ , ao longo da semi-circunferência  $NS$ , que corresponde ao arco  $SD$ ,
- $GD$  é a corda paralela ao diâmetro  $NS$ ,
- $AB$  e  $GD$  intersectam-se em  $M$ ,
- $OM$  é a direção da quibla.

Se  $OG = FM = \sin\Delta L$  e  $GM = \sin\Delta\phi$ , pelo Teorema de Pitágoras vem  $OM = \sqrt{(\sin\Delta L)^2 + (\sin\Delta\phi)^2}$ .

A quibla é  $S\hat{O}M$ . Vamos considerar  $q'$  como sendo o ângulo complementar de  $S\hat{O}M$ . Assim, usando o  $\Delta OGM$  vem:

$$q' = \sin^{-1}\left(\frac{GM}{OM}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sin\Delta\phi}{\sqrt{(\sin\Delta L)^2 + (\sin\Delta\phi)^2}}\right)$$

e portanto:

$$q = 90^\circ - \sin^{-1}\left(\frac{\sin\Delta\phi}{\sqrt{(\sin\Delta L)^2 + (\sin\Delta\phi)^2}}\right).$$

Esta aproximação funciona bem em algumas regiões mas leva a erros noutras localidades.

De notar que Al-Battānī poderia ter usado um processo mais simples calculando  $q' = \tan^{-1}\left(\frac{GM}{FM}\right)$ . Contudo ele ainda não dominava a função tangente pelo que necessitou de recorrer à função inversa de Seno.

#### 4.10.2. O método de Habash al-Hāsib

Esta secção baseou-se nas fontes seguintes: Van Brummelen, *The mathematics of the heavens and the earth* (2009), Kennedy & Yusuf'Id (1974), King & Lorch (1999) e King (1999).

#### 4.10.2.1) Analemas

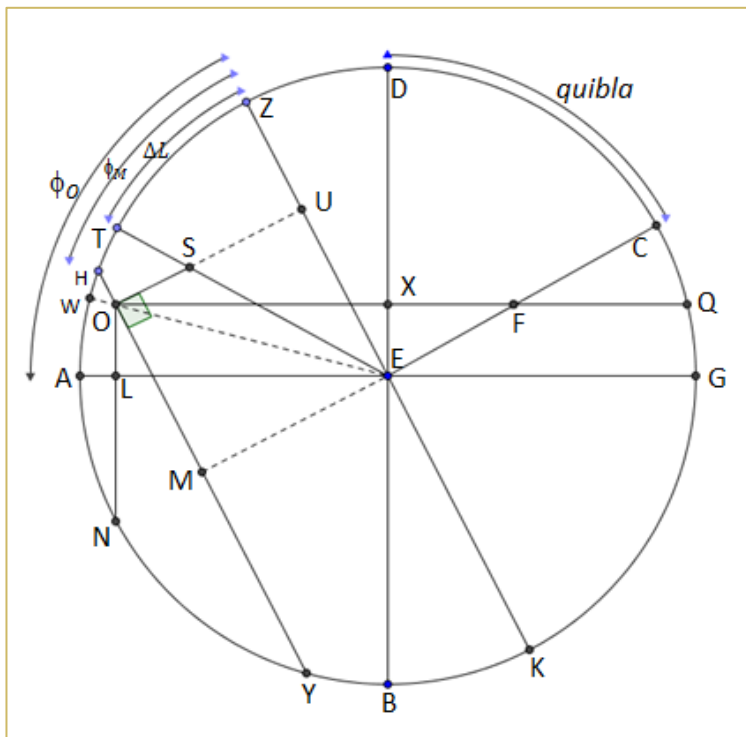
Um método que foi utilizado, bem mais sofisticado que o anterior, foi o uso de um analema. Este nome está relacionado com um dos livros de Ptolomeu com o mesmo título. Um analema é um método de resolução de um problema por procedimentos gráficos. Na Grécia, os analemas envolviam a rotação de um círculo na esfera celestial até chegar a outro plano. No Império Árabe os analemas abundam e foram usados para resolver vários problemas, incluindo problemas de trigonometria esférica, geografia matemática, medição do tempo astronómico ou construção de instrumentos matemáticos.

Um dos primeiros procedimentos deste tipo é da autoria de Habash al-Hāsib e data do século IX. Habash al-Hāsib foi uma figura notável da matemática ligada à astronomia. Os seus analemas estão entre as suas contribuições mais criativas.

#### 4.10.2.2) A construção de Habash

O analema de Habash dá um marcador visual direto para a direção apropriada da *qibla*.

Vamos seguir Kennedy & Yusuf'Id (1999).



**Ilustração 64 - Construção de Habash, modelo bidimensional**



#### 4.10.2.3) A justificação que a construção é válida

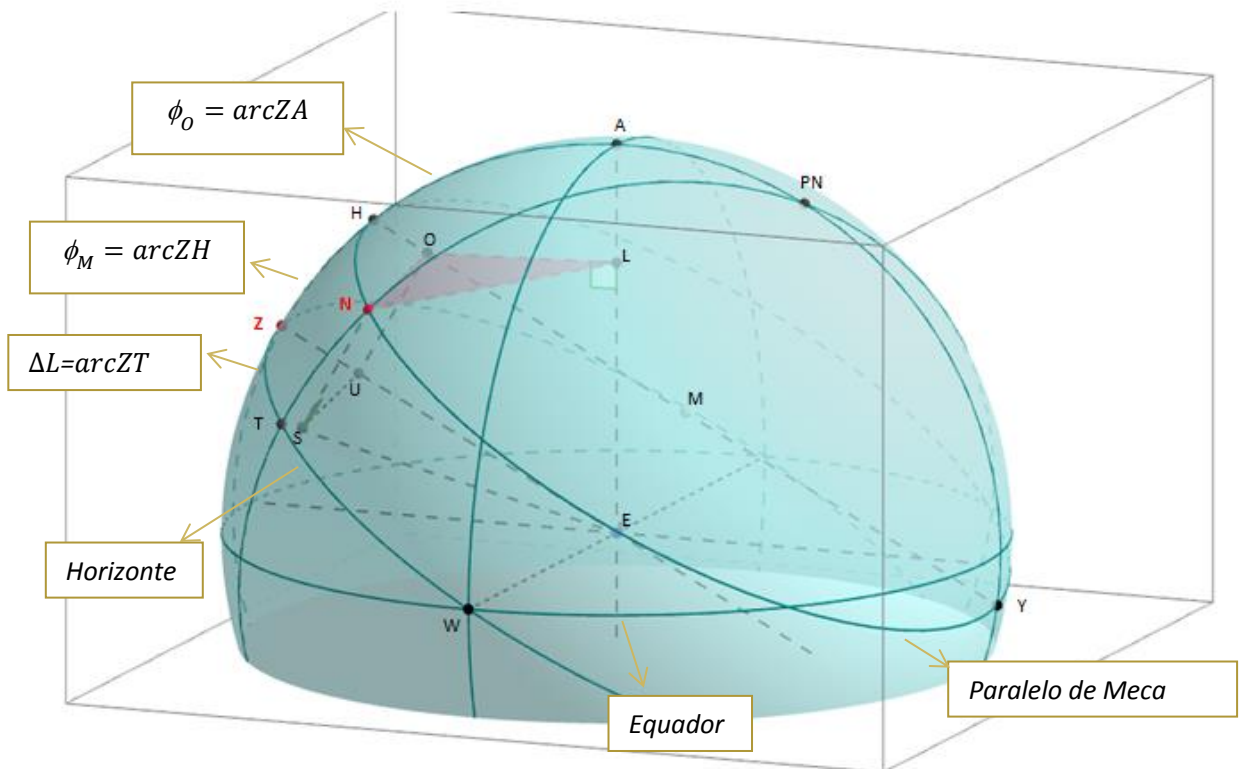


Ilustração 66 - Construção de Habash, modelo tridimensional

Para justificar a construção, comparamos a construção da Ilustração 64 com a Ilustração 66.

Esta correspondência não é consistente pois o plano do analema representa diferentes planos do espaço em vários estágios de construção.

Notar que na Ilustração 66:

- a distância do zênite da localidade ( $A$ ) ao paralelo onde encontramos o zênite de Meca ( $N$ ) é  $\phi_0 - \phi_M$  e que na construção se trata do arco  $AH$ ;
- a distância entre o paralelo de Meca e o equador é  $\phi_M$  – na construção trata-se do arco  $HZ$ .

Al-Bīrūnī descreve apenas o analema, dizendo que a prova de Habash é evidente. Tal é duvidoso já que o círculo do analema muda de papel três vezes.

- 1) O primeiro círculo, que vamos considerar para o analema, é o círculo do meridiano (círculo que passa por  $A$ ,  $H$  e  $Z$ ) com o zênite do observador em  $A$ .  
Os diâmetros do equador  $ZEB$  e do paralelo de Meca  $HY$  são desenhados apropriadamente de acordo com os valores de  $\phi_0$  e  $\phi_M$ .
- 2) O círculo do analema transforma-se no equador pois o diâmetro  $ZEB$  é partilhado pelo equador e pelo meridiano. Assim, vamos olhar para  $ZEB$  no plano do equador.

Desenhamos  $\Delta L = \text{arc } ZT$ .

Na Ilustração 66, desenha-se a perpendicular que passa pelo zénite de Meca  $N$  sobre o equador, obtemos  $S$  (como  $ES$  é o raio do paralelo de Meca, na Ilustração 64,  $S$  é obtido desenhando  $ES = MY$ ).

Baixando a perpendicular  $SU$  em  $ZE$ , a configuração  $ZUEST$  vai ser idêntica nas duas figuras.

- 3) Regressa-se ao círculo do meridiano, pois  $ZUEB$  está também no meridiano. Isto permite projetar  $U$  no paralelo de Meca, definindo  $O$  nos dois diagramas. Projetando  $O$  em  $AE$ , define-se  $L$ .
- 4)  $LN$  na Ilustração 66 tem a direção que pretendemos. Como  $ALE$  também está no plano do círculo que passa pelos dois zénites,  $A$  e  $N$ , o círculo do analema passa para este círculo e podemos desenhar  $LN$  facilmente nos dois diagramas.
- 5) Na Ilustração 64 temos o comprimento correto mas não a direção. Para isso: desenha-se a horizontal  $OXQ$  de tal forma que  $OL = EX$ . Depois desenha-se  $EFC$  de modo que  $EF$  tenha o mesmo comprimento que  $LN$ . Desta forma o triângulo  $EFX$  do analema é o mesmo que o triângulo  $LNO$  da Ilustração 66.

#### 4.10.2.4) Relação entre o analema e a trigonometria

A fonte é Van Brummelen, The mathematics of the heavens and the earth (2009).

Na Ilustração 64, comecemos por notar que:

✓  $ES = MY = \cos \phi_M$  (por construção, recorrendo ao  $\Delta EMY$  e tomando  $EY$  como a unidade),

✓  $\sin \Delta L = \frac{SU}{ES} \Leftrightarrow SU = ES \cdot \sin \Delta L$ ,

✓  $UO = EM = \sin \phi_M$ ,

✓  $UO - SU = SO$ ,

✓ unimos  $E$  a  $O$ :  $SO$  e  $ES$  e o ângulo  $E\hat{S}O = \Delta L + 90^\circ$  são conhecidos,

✓ para determinar  $EO$  usamos a proposição *Euclides II, 12*:

$$EO^2 = SO^2 + SE^2 + 2 \cdot SO \cdot SE \cdot \cos E\hat{S}O$$

(A demonstração da proposição *Euclides II, 12* consta do Anexo)

✓ a partir de  $EO$  e  $UO$  poderemos determinar  $U\hat{O}E$  (fazendo  $\sin^{-1} \left( \frac{UO}{EO} \right)$ ),

✓  $S\hat{O}F = 90^\circ - F\hat{O}Y = 90^\circ - U\hat{E}O = 90^\circ - \phi_M$  ( $F\hat{O}Y = U\hat{E}O$  pois  $UEMO$  é um paralelogramo),

donde, obtemos  $F\hat{O}E$  fazendo  $F\hat{O}E = U\hat{O}E - S\hat{O}F$ .

✓  $F\hat{O}E = O\hat{E}L$  (pois são ângulos alternos internos),

✓ como  $OE$  é conhecido, obtemos  $OL$  fazendo  $\sin O\hat{E}L = \frac{OL}{OE} \Leftrightarrow OL = OE \cdot \sin O\hat{E}L$ ,

✓  $LN^2 = AL \cdot LG$  (considerando o  $\triangle ANG$  que é retângulo em  $N$  e  $LN$  que é a sua altura)

$$= (R - LE) \cdot (R + LE), \text{ donde } LN = \sqrt{(R - LE) \cdot (R + LE)}.$$

Podemos agora determinar a *qibla* dada por:

$$\cos^{-1}\left(\frac{XE}{EF}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{OL}{LN}\right)$$

(pois  $XE = OL$  e  $EF = LN$ , por construção).

#### 4.10.2.5) As tabelas, instrumentos e mapas para determinar a *qibla*

Consequentemente, havia várias tabelas para a *qibla*! No caso da fórmula aproximada, há uma tabela do século IX preparada em Bagdad que apresenta valores para a *qibla* em graus e minutos: os valores de  $\Delta L$  são dados com intervalo de  $1^\circ$  e os valores de  $\Delta L$  vão de  $1^\circ$  a  $20^\circ$ . No caso da fórmula exata, uma das tabelas é a do astrónomo de Damasco Shams al-Dīn al-Khalīlī na qual  $q(\phi_0, \Delta L)$  vem em graus e minutos: para cada grau de  $\phi_0$  de  $10^\circ$  a  $50^\circ$  e para cada grau de  $\Delta L$  de  $1^\circ$  a  $60^\circ$ . Esta tabela tem muita precisão e apresenta 2880 entradas. A latitude varia entre  $28^\circ$  e  $33^\circ$ .

À *qibla* aparece ainda ligado o desenvolvimento de instrumentos: instrumentos esféricos, valores da *qibla* para uma certa localidade gravados nas costas de um astrolábio ou de um relógio de sol horizontal, compassos magnéticos com informação das *qiblas* de várias localidades gravados nas suas hastes. Há ainda uma tradição no Irão de gravar valores da *qibla* em vasilhames de cerâmica vidrado e latão.

Os estudiosos muçulmanos prepararam também mapas para, especificamente, encontrar a *qibla*.

Atualmente, a determinação da *qibla* está presente nas novas tecnologias, havendo uma aplicação para *smartphones* para o efeito.

### 4.11. Uma aplicação na geografia

Uma das maiores inovações na trigonometria no Mundo Islâmico foi a sua aplicação para além da Astronomia. Já se tinham verificado anteriormente este tipo de aplicações mas eram isoladas. É no Império Árabe que, de fato, podemos observar a trigonometria aplicada sistematicamente noutro campo científico como a geografia matemática.

A geografia matemática divide-se em duas partes:

- a cartografia – que trata da produção de mapas, fazendo a projeção da superfície esférica da Terra numa superfície plana. Neste caso deu-se seguimento ao trabalho feito nos tempos helénicos. A trigonometria é necessária ocasionalmente para localizar pontos em mapas.

- a geodesia – que trata do estudo das dimensões da Terra e onde a trigonometria (especialmente a esférica) se torna indispensável. Um tratado destaca-se: a Determinação das Coordenadas das Posições para a Correção das Distâncias entre Cidades de al-Bīrūnī. Neste tratado são cobertos a maior parte dos tópicos da geodesia: começa com a determinação da *quibla* de Ghazna, Bagdad e depois passa para problemas como a determinação das latitudes e longitudes terrestres, o tamanho da Terra ou a determinação das distâncias entre cidades em círculos máximos.

Vamos dar algum desenvolvimento ao último problema referido, por várias razões:

- embora seja um problema, aparentemente, de trigonometria esférica, a sua resolução recorre a métodos da trigonometria plana;
- revisita o Teorema de Ptolomeu;
- contribuiu para resolução de um problema maior de trigonometria esférica: a determinação da *quibla*.

Observemos a Ilustração 67:

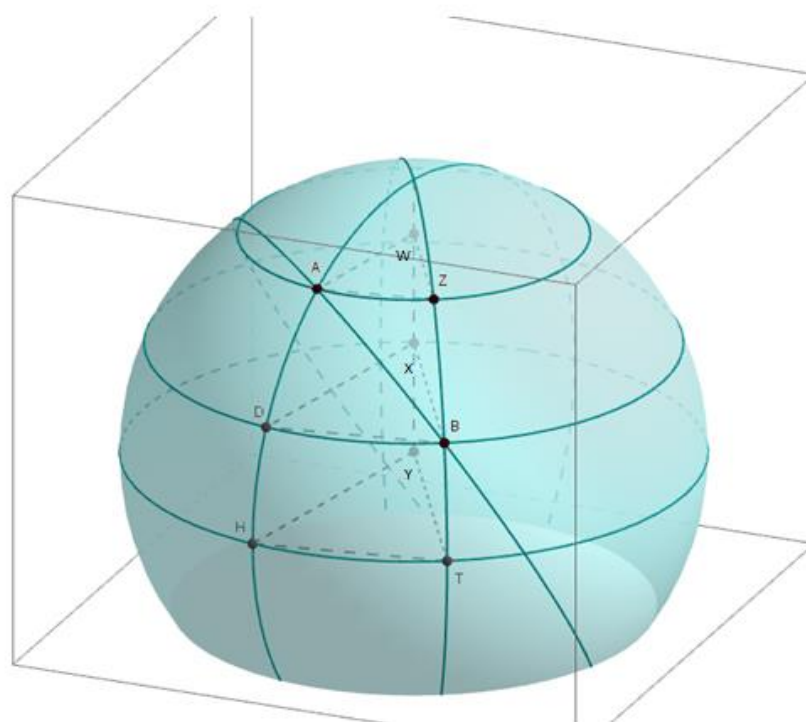


Ilustração 67 - Problema da distância entre duas cidades, A e B

Nesta figura:

- consideramos duas cidades,  $A$  e  $B$ ;
- a cidade  $A$  tem coordenadas  $\phi_A = \text{arc } AH$  e  $L_A$ ;
- a cidade  $B$  tem coordenadas  $\phi_B = \text{arc } BT$  e  $L_B$ ;

$$-\Delta L = L_A - L_B = \text{arc } HT;$$

O objetivo é determinar a amplitude de  $\text{arc } AB$ .

Anos antes, Abū'l-Wafā tinha resolvido este problema usando dois métodos, um dos quais usando a tangente. Al-Bīrūnī usa um método diferente que recupera o Teorema de Ptolomeu.

Começemos por notar que os triângulos  $AZW$ ,  $DBX$ ,  $HTY$  são isósceles e semelhantes.

Assim:

$$\frac{AW}{AZ} = \frac{DX}{BD} = \frac{HY}{HT} \Leftrightarrow \frac{\cos \phi_A}{AZ} = \frac{\cos \phi_B}{BD} = \frac{R}{\text{crd} \Delta L},$$

donde:

$$AZ = \frac{\cos \phi_A \cdot \text{crd} \Delta L}{R} \quad \text{e} \quad BD = \frac{\cos \phi_B \cdot \text{crd} \Delta L}{R}.$$

Como  $AZBD$  é um quadrilátero cíclico pois  $AD = BZ$  e  $AZ \parallel BD$ , podemos aplicar o teorema de Ptolomeu:

$$\begin{aligned} AB \cdot ZD &= AZ \cdot DB + AD \cdot BZ \Leftrightarrow AB \cdot AB \\ &= \left( \frac{\cos \phi_A \cdot \text{crd} \Delta L}{R} \right) \cdot \left( \frac{\cos \phi_B \cdot \text{crd} \Delta L}{R} \right) + \text{Crd} \Delta \phi \cdot \text{Crd} \Delta \phi \Leftrightarrow \\ AB^2 &= \left( \frac{\cos \phi_A \cdot \text{crd} \Delta L}{R} \right) \cdot \left( \frac{\cos \phi_B \cdot \text{crd} \Delta L}{R} \right) + (\text{Crd} \Delta \phi)^2. \end{aligned}$$

Obtemos, assim,  $AB$  em função do raio da terra. Al-Bīrūnī antes já havia determinado o raio da terra.<sup>15</sup>

## 4.12. Instrumentos astronómicos e trigonométricos

A fonte é Van Brummelen, *The mathematics of the heavens and the earth* (2009).

Até agora observamos a aplicação da trigonometria a problemas astronómicos no domínio do lápis e papel: as soluções são obtidas com diagramas geométricos e com a ajuda de valores trigonométricos obtidos, geralmente, através de tabelas trigonométricas.

Contudo no Islão medieval apareceu uma tradição diferente: a construção de instrumentos manuais metálicos, gravados com curvas e aos quais se juntavam réguas. Estes instrumentos, muitos dos quais engenhosos, permitiam ao utilizador resolver, fácil e rapidamente, problemas trigonométricos

<sup>15</sup> A determinação do raio da Terra por Al-Bīrūnī pode ser vista num vídeo da *BBC* em: <http://www.youtube.com/watch?v=fNuJlpxlSTo>.



simplesmente, ajustando o instrumento e lendo a resposta dada, geralmente, como um comprimento medido numa escala.

### 4.12.1. O quadrante horário

Entre estes instrumentos encontramos o quadrante horário. O quadrante horário foi desenhado para resolver o problema da determinação da hora do dia a partir da altura do Sol.

Alguns quadrantes horários eram chamados “universais” pois funcionavam bem para todas as latitudes do mundo islâmico e em qualquer altura do ano. Às vezes, estes quadrantes eram encontrados nas costas de um astrolábio. A seguir ao astrolábio, o quadrante horário era o instrumento mais popular do período medieval. Foi revisto várias vezes e na Europa aparece uma das suas versões com o nome de *quadrans vetus*.

Veja-se agora como funciona o quadrante horário na sua forma mais simples recorrendo à Ilustração 68:

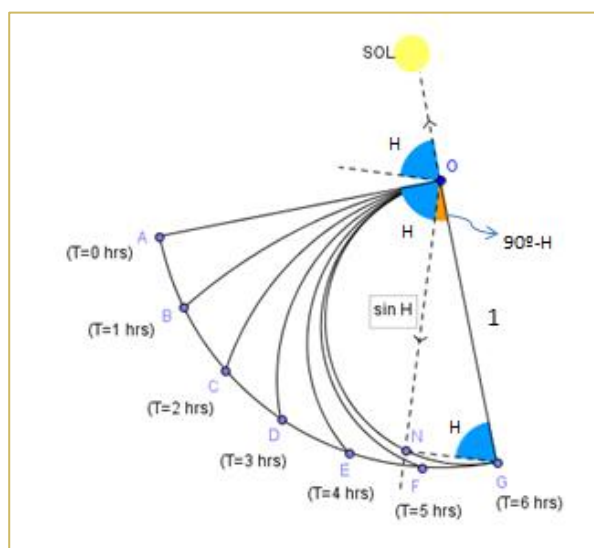


Ilustração 68 - Quadrante horário, I

- o setor circular do quadrante é dividido em seis partes, que correspondem a seis horas sazonais diárias;
- arcos circulares são desenhados a partir de  $O$  passando por  $B, C, D, E, F$  e  $G$  e os seus diâmetros estão sobre  $OG$  ou o sobre o seu prolongamento;
- o Sol é avistado ao longo de  $OG$  ao meio dia e uma pínula é fixada em  $N$  na linha de prumo no semicírculo  $ONG$  que corresponde ao meio dia (hora diária sazonal  $T = 6$ ).  $\widehat{AON} = H$  é a altitude do Sol ao meio dia;

- a outra hora qualquer, o utilizador avista o Sol e coloca a pínula  $X$  sobre o arco correspondente do quadrante. Na figura apresentada  $X$  está sobre o arco correspondente a  $T = 2$  horas, e por isso 2 é o número de horas sazonais antes do nascer ou do por do Sol.

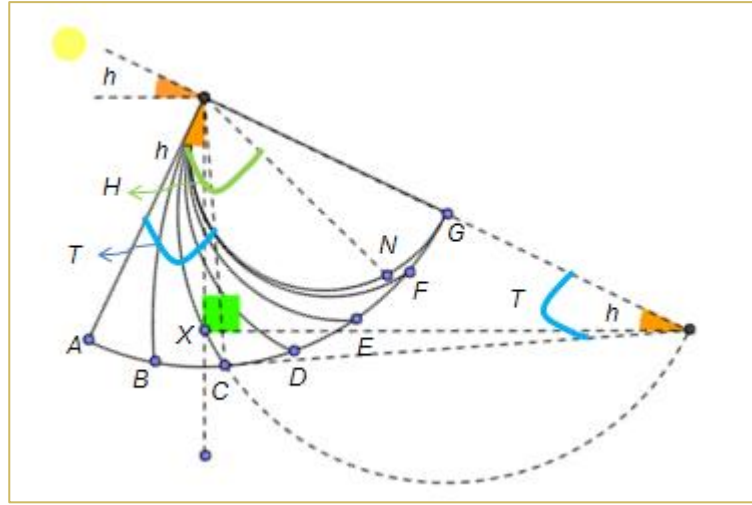


Ilustração 69 - Quadrante horário, II

Porque é que este método funciona?

Vamos considerar que o quadrante tem raio 1.

Sabemos que um triângulo inscrito num semicírculo é retângulo pelo que o triângulo  $ONG$  é retângulo.

Como  $G\hat{N}O = 90^\circ$  e  $A\hat{O}N = H$  vem que  $N\hat{O}G = 90^\circ - H$  e  $N\hat{G}O (= G) = H$ .

Pela definição de seno, no triângulo  $ONG$  vem  $ON = \sin H$ .

No círculo correspondente à hora atual ( $OXCJ$  na Ilustração 69) há dois triângulos inscritos:

- no triângulo  $OXJ$ ,  $O\hat{J}X = h$  (usando a mesma argumentação que vimos para  $H$ ), que é a altitude do Sol nesse momento. Assim  $OX = (ON) = OJ \sin h$ .

- por outro lado, no triângulo  $OCJ$ ,  $O\hat{J}C = T$  (usando a mesma argumentação que vimos para  $H$ ), que é o instante do dia medido em horas. Assim,  $OC = (1) = OJ \sin T \Leftrightarrow OJ = \frac{1}{\sin T}$ .

Então:

$$ON = OJ \sin h = \frac{1}{\sin T} \cdot \sin h = \frac{\sin h}{\sin T}.$$

Igualando as duas expressões para  $ON$ :

$$\sin H = \frac{\sin h}{\sin T} \Leftrightarrow \sin h = \sin H \cdot \sin T,$$

que não é mais que a fórmula para a marcação do tempo.

Assim, embora o quadrante horário tenha sido desenvolvido para determinar a hora do dia, pode ser visto como um computador que resolve equações da forma  $\sin h = \sin H \cdot \sin T$ , o que era uma ótima alternativa às tabelas auxiliares usadas para esta equação e que eram comuns quer no islão medieval quer na europa renascentista.

#### 4.12.2. O seno quadrante ou quadrante sinecal (*Rubul mujayyab*)

Este instrumento está relacionado com o quadrante horário mas tem um objetivo matemático mais explícito e foi desenvolvido nos séculos IX e X.

Ambos os instrumentos podem ser encontrados na obra de al-Khwārizmī. Embora o objetivo principal fosse determinar a hora do dia a partir da altitude do Sol, quem fosse esperto o suficiente era capaz de resolver variados problemas de trigonometria esférica.

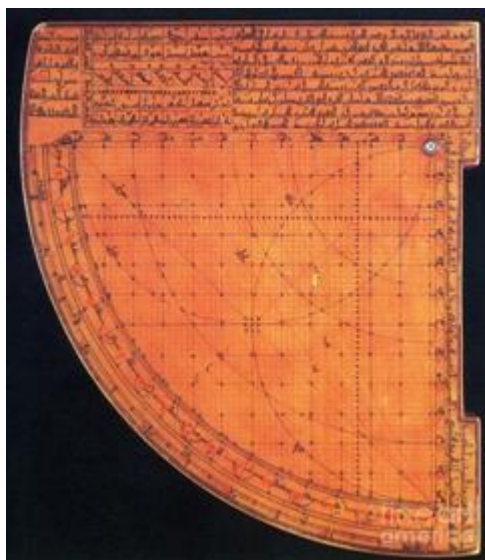


Ilustração 70 - Seno Quadrante<sup>16</sup>

O mais surpreendente do seno quadrante é a sua associação a uma grelha de coordenadas cartesianas, quando em geral se pensa que é uma invenção europeia.

Estas coordenadas tornam fácil a determinação do seno e cosseno de qualquer arco. Basta ajustar o fio ao ângulo apropriado na parte curva do quadrante e seguir as linhas horizontais e verticais até às escalas das duas pontas.

Uma aplicação do quadrante sinecal é a determinação da ascensão reta.

Vejamos primeiramente o que é a *ascensão reta*.

A fonte é o Site Web Sistema de Coordenadas Equatoriais (2013).

<sup>16</sup> Fonte: <<http://traveltoeat.com/arabian-astrolabes-clocks-and-sundials-british-museum/>> 5/08/2013

Do mesmo modo que as longitudes e latitudes estabelecem localizações sobre a superfície da Terra, foi criada uma rede análoga para designar localizações no espaço, sobre a esfera celeste.

Este é o "sistema de coordenadas equatoriais" e as coordenadas nele definidas são chamadas de declinação (coordenada análoga à latitude das coordenadas geográficas) e de ascensão reta (coordenada análoga à coordenada geográfica longitude).

Para um observador situado sobre a superfície da Terra, as estrelas parecem girar a cada 23 horas e 56 minutos. No entanto, sabemos que é a Terra que está a girar e as estrelas permanecem fixas. Deste modo, o sistema de coordenadas equatoriais também permanece fixo e dizemos que a ascensão reta e a declinação formam um sistema de coordenadas fixo para as estrelas.

Para definir o sistema de coordenadas equatoriais fazemos uso da esfera celeste, a esfera imaginária que supomos circundar a Terra.

A ascensão reta é obtida pela projeção das linhas de longitude. A longitude zero sobre a Terra é dada pelo meridiano que passa pela cidade de Greenwich, na Inglaterra. Entretanto, a Terra gira em relação à esfera celeste. Do ponto de vista da Terra, é a esfera celeste que está rodando. Assim, deve ser escolhido um ponto sobre a esfera celeste para representar a longitude zero. Este ponto é o equinócio vernal.

A ascensão reta de um objeto celeste é o ângulo até o círculo horário do corpo, medido na direção leste ao longo do equador celeste a partir do equinócio vernal. A ascensão reta também difere da longitude na sua unidade de medida. A ascensão reta é expressa não em graus mas em horas, minutos e segundos. O intervalo de medida da ascensão reta é de 0 a 24 horas. Em  $360^\circ$  existem 24 horas de modo que cada hora corresponde a  $15^\circ$ .

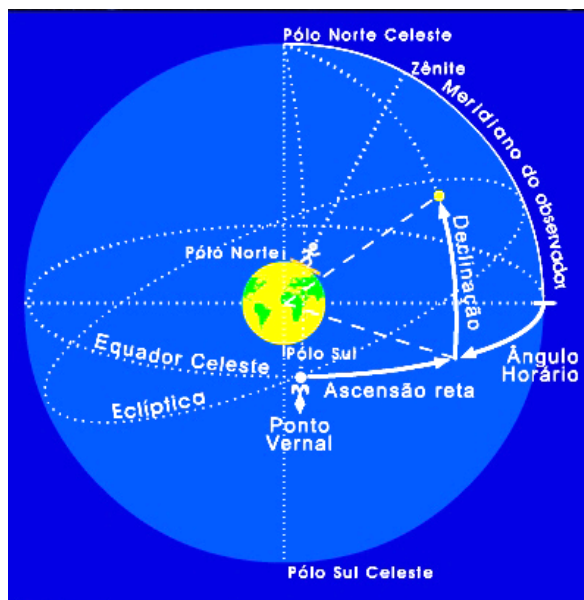


Ilustração 71 - Sistema de Coordenadas Equatoriais

Al-Sijzī explica como determinar a ascensão dos signos na esfera celeste:

*“Quando AD é a declinação no aparecimento de Touro, e desenhamos DE paralelamente a AB, e AZ é a declinação máxima e desenhamos BZ, e desenhamos a partir da sua interseção [com] DE, que é o ponto T, a linha TH é paralela a BE e desenhamos BD intersectando TH em K, e quando BD é dividido em 90, [então] BK é a ascensão do aparecimento de Touro.”*

Vejamos porque isto funciona com o auxílio da Ilustração 72.

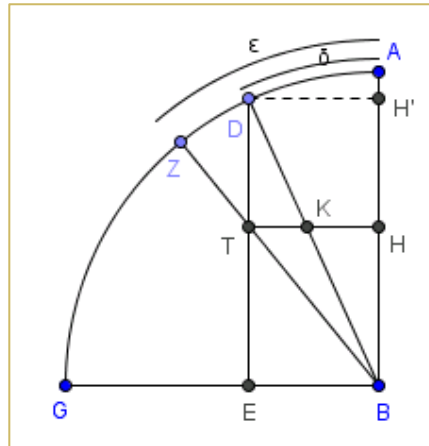


Ilustração 72 - Seno quadrante:  
interpretação geométrica

O objetivo é a determinação da ascensão reta  $\alpha$ , dada a declinação  $\delta$  e a declinação máxima, que é a obliquidade da eclíptica,  $\varepsilon$ .

Como os triângulos  $BKH$  e  $BDH'$  são semelhantes pelo critério  $AA$  vem:

$$\frac{BK}{BD(=1)} = \frac{KH}{TH} \Leftrightarrow BK = \frac{KH}{TH} \Leftrightarrow BK = \frac{KH}{HB} \cdot \frac{HB}{TH} \Leftrightarrow BK = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} \cdot \frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} \Leftrightarrow BK = \tan \delta \cdot \cot \varepsilon.$$

Se o autor interpretar  $BK$  como  $\sin \alpha$  em vez de  $\alpha$  (o que era bastante comum na altura), obtemos a fórmula:

$$\sin \alpha = \tan \delta \cdot \cot \varepsilon,$$

que é a mesma que foi usada por Ptolomeu no seu Almagesto.

### 4.13. Conclusão

A fonte é Joseph (1991).

Como vimos, os estudiosos islâmicos foram bastante originais, juntando o melhor de dois mundos: as tradições algébricas e aritméticas das culturas da Mesopotâmia, Índia e China e as tradições geométricas da Grécia e do mundo helênico.

A história e a religião na Europa travaram a circulação das ideias do mundo islâmico no momento em que a Europa estava a reerguer-se do período medieval. De fato, na procura de raízes, os europeus olharam apenas para a Grécia e para Roma, negligenciando a sua herança islâmica e não europeia. Se na Grécia encontraram a sua herança cultural e intelectual, em Roma e em Bizâncio encontraram as suas raízes religiosas.

Apesar disso, o impacto do mundo islâmico na vida intelectual da Europa está mais bem documentado que outras influências culturais. A questão destas transmissões não cabe no nosso trabalho mas é de notar que essas influências se verificaram, por exemplo, na resolução de equações ou no sistema solar de Copérnico.



## Capítulo 5 – Trigonometria em Portugal

Depois de ter sido abordado o desenvolvimento geral da Trigonometria, partindo do trabalho de alguns matemáticos, propõe-se neste ponto enquadrar, sinteticamente, o presente objeto de estudo em torno da Europa e de Portugal.

Sobre a Europa e os seus matemáticos muito haveria a dizer. Basta pensar em Copérnico e Regiomontanus. A opção que se tomou foi por dirigir as atenções para um dos maiores matemáticos portugueses, Pedro Nunes.

Começa-se por fazer um ponto de situação na Europa ao nível histórico e científico, fazendo-se as ligações possíveis com a Grécia, Índia e o Mundo Árabe.

Depois, situa-se Pedro Nunes na história do seu país e no desenvolvimento científico da época, nomeadamente na Península Ibérica.

Feita a contextualização, será apresentada uma curta biografia de Pedro Nunes, uma resenha das suas fontes e das obras que publicou.

Entre as obras de Pedro Nunes destaca-se o Tratado da Sphera e, em particular, a *Annotação sobre as derradeiras palavras do Capitulo dos Climaxes* que tornaria o matemático famoso na Europa. A escolha desta *Annotação* prendeu-se não só pela sua divulgação mas também por se tratar de um documento onde é possível observar uma notável aplicação da Trigonometria plana.

### 5.1. A ciência árabe chega à Europa

A fonte é o Site Web History of Trigonometry (1997-2012).

Os astrónomos árabes haviam aprendido muito com os indianos, tinham contato com os chineses através da Rota da Seda e das rotas marítimas e, ainda, haviam estabelecido postos comerciais na Índia e na China. Através destes contatos, o budismo indiano espalhou-se pela China e aí se estabeleceu no século III a.C. Como o budismo, certamente, terão ido também algumas técnicas de cálculo indianas. Contudo, poucas, inovações tecnológicas passaram da China para Índia ou para o Império Árabe.

Por volta de 790 d.C., o império Árabe atingiu a sua expansão máxima na Europa, chegando a conquistar a maior parte da Península Ibérica: trata-se de área chamada Al-Andaluz pelos Árabes e que incluía a maior parte da Espanha e de Portugal, à exceção da região mais a norte, no reino das Astúrias.



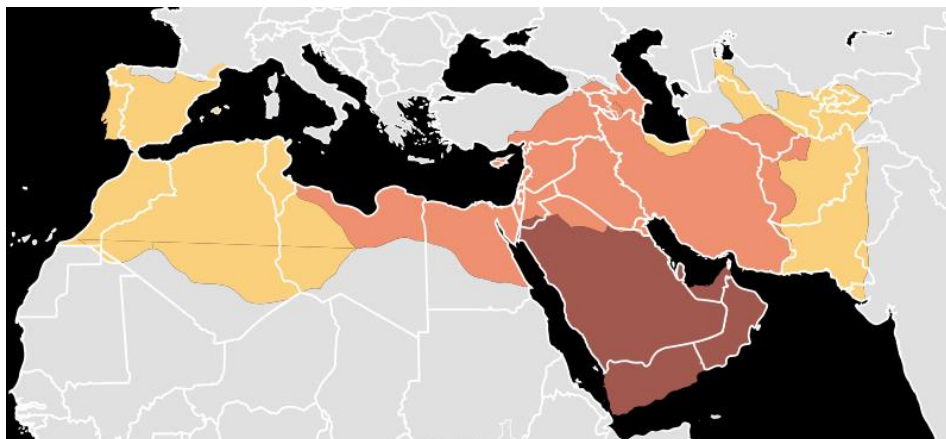


Ilustração 73 - Império árabe por volta de 750<sup>17</sup>

Nesta altura muitas religiões e raças coexistiam na Ibérica islâmica, cada uma contribuindo com a sua cultura. A religião muçulmana era, geralmente, muito tolerante com as restantes. A literatura na Ibéria islâmica espalhou-se aí mais rapidamente do que em qualquer outra parte da Europa Ocidental.

Pelo século X, Córdoba tinha Bibliotecas tão boas como as de Bagdad e as cidades de Córdoba e Toledo tornaram-se centros de tradução.

Entre 1095 e 1291 iniciam-se as cruzadas militares onde os cristãos lutam contra o império árabe. O objetivo das cruzadas a recuperação do controlo cristão da Terra Sagrada mas, também, havia razões políticas e económicas.

Nestes tempos agitados, havia centros estáveis onde os estudiosos de todas as culturas se encontravam e o conhecimento era desenvolvido, traduzido e transmitido à Europa Ocidental.

As três rotas principais através das quais a ciência grega e árabe se tornaram conhecidas foram Constantinopla (atual Istambul), Sicília e Espanha. Os textos gregos foram conhecidos pelos monges europeus e estudiosos que viajavam com os exércitos através de Constantinopla no seu caminho para sul para a Terra Sagrada. Estas pessoas aprenderam grego e eram capazes de traduzir trabalhos clássicos para latim. A partir da Sicília, os árabes comerciavam com a Itália e a tradução teve ali lugar. Contudo a maior rota através da qual a ciência árabe atinge a Europa é pelas casas de tradução de Toledo e Córdoba, através dos Pirenéus, a partir do sudoeste francês.

Durante os séculos XII e XIII, centenas de trabalhos de fontes árabes, gregas e hebraicas foram traduzidos para latim e desta forma novos conhecimentos foram disseminados pela Europa cristã.

O conhecimento geométrico na Europa Medieval era prático e tinha a ver com áreas, alturas, volumes e cálculos com frações para medição de campos e construções de grandes casas senhoriais, igrejas, castelos e catedrais.

---

<sup>17</sup> Fonte: < [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Map\\_of\\_expansion\\_of\\_Caliphate.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Map_of_expansion_of_Caliphate.svg) > 10/07/2013

## 5.2. A Índia e Portugal

A fonte é Joseph (1991).

A primeira motivação para os europeus importarem o conhecimento da Índia foi a navegação: era necessária maior precisão nos cálculos e uma astronomia mais avançada. Para além disso, era necessário um melhor calendário (a Igreja Romana queria reformar o calendário para corrigir datas erradas da Páscoa e de outras festividades).

A chegada de Francisco Xavier a Goa em 1540 iniciou uma presença contínua dos jesuítas em Malabar até 1670. Os primeiros jesuítas estavam interessados na aprendizagem de linguagens vernáculas para, depois, iniciar o seu trabalho de conversão.

Os jesuítas que se seguiram tinham outras intenções. Exemplo disso, é Matteo Ricci que fez parte da primeira fornada de jesuítas treinados com o novo currículo de matemática, introduzido no Colégio Romano por Clavius. Para além de ser um matemático talentoso, estudou cosmografia e ciências náuticas em Lisboa antes de ir para a Índia. Desta forma Ricci era um ótimo candidato para investigar as ciências da Índia. Outros cientistas jesuítas treinados nos mesmos moldes foram enviados para a Índia, como Johann Schreck ou António Rubino. Em certa altura, estes jesuítas foram à região de Malabar, incluindo a região de Cochi, que era o epicentro da matemática de Kerala.

Para além disso os Jesuítas contatavam com os membros da corte de Cochim, apesar da sua ação evangelizadora, o que possivelmente lhes deu acesso aos manuscritos de maior importância da escola de Kerala.

São estes fatos que suportam a ideia de que os Jesuítas fizeram parte do intercâmbio de ideias científicas entre a Europa, a China e a Índia. Os manuscritos de Goa que podem ser encontrados na livraria história jesuíta em Roma dão conta disso, bem como outros fragmentos de manuscritos como cartas.

Contudo são vários os autores que dizem que, apesar disso:

- os desenvolvimentos na Europa do cálculo são independentes dos desenvolvimentos na Índia;
- a transmissão das descobertas da Matemática de Kerala estava mais relacionada com o “know-how” e técnicas de cálculo através dos artesãos, técnicos e comerciantes.

O debate irá continuar...

### 5.3. Pedro Nunes (1502-1578)

#### 5.3.1. A evolução da Matemática medieval até Pedro Nunes

A fonte é Ventura (1985).

Em 750 dá-se a cisão do império árabe: surge o império oriental com capital Bagdad e o império ocidental com capital em Córdoba, Espanha. É neste momento que as matemáticas começam a brilhar em Espanha. Dada a proximidade com Espanha, também em Portugal a Matemática se desenvolve. Na Escola de Córdoba as ciências sobem a posições de esplendor, graças aos sábios muçulmanos atraídos de vários quadrantes. Nesta escola estuda-se Astronomia, a aplicação da Álgebra à Geometria e a Análise Matemática. Numa cidade próxima de Córdoba, Toledo torna-se depois uma espécie de entreposto na receção e divulgação da ciência helénico-árabe e o maior centro medieval de investigação astronómica. Afonso X, avô de D. Dinis de Portugal, criou um “Estúdio-Oficina” onde cristão, judeus e árabes coexistiam pacificamente, estando unidos pelo gosto pela investigação científica. Ligados a esta Escola de Toledo estão as Tábuas de Afonso X e os Libros del Saber de Astronomia, trabalhos que foram decisivos no progresso da ciência matemática. Estes trabalhos tiveram implicações na Náutica e contribuíram para a criação da cadeira de Astronomia na Universidade de Salamanca. Em particular, estas obras tiveram reflexos em Portugal.

Organizadas as fronteiras geográficas do Reino portugalense, durante a dinastia afonsina, logo D. Dinis preocupou-se com o incremento da cultura, fazendo nascer a Universidade de Coimbra onde era apenas ministrado o ensino das Leis, Humanidades, Direito Canónico e Medicina. D. Dinis organiza também a Marinha. A cultura matemática só mais tarde ganharia importância. Até lá ficou ligada, nas suas origens, à problemática da Náutica desenvolvendo-se, de forma mais ou menos organizada, com o Infante D. Henrique, o Navegador na célebre Escola de Sagres. A Escola de Sagres vai buscar conhecimentos sobretudo a dois polos – Toledo e Salamanca. Só no século XVI, com Pedro Nunes, se iniciaria a fase teórica do estudo da Matemática, tendo mesmo algum sentido pedagógico.

### 5.3.2. Biografia

A fonte é Lourenço e Espinho (2002).



Ilustração 74 - Pedro Nunes<sup>18</sup>

Pedro Nunes nasceu em Alcácer do Sal, em 1502, embora em algumas fontes se encontre como ano de nascimento 1492. Logo no ano de nascimento começam as dúvidas e incertezas acerca da vida de Pedro Nunes. Em qualquer dos casos, Pedro Nunes nasceu no momento em que Portugal estava no seu máximo esplendor.

Há que referir que Pedro Nunes nasce cerca de uma década depois de três descobrimentos:

- da América, por Cristóvão Colombo;
- do caminho marítimo para a Índia, por Vasco da Gama;
- das praias de Santa Cruz, por Pedro Álvares Cabral.

Por outro lado, no ano em que Pedro Nunes nasceu, Vasco da Gama faz a sua segunda viagem à Índia e passados pouco anos, quando Pedro Nunes estava na sua plena juventude, realizou-se a primeira viagem de circum-navegação.

Pedro Nunes está, assim, envolto numa atmosfera esplendorosa que terá influenciado o caminho que percorreu a nível científico.

Não se sabe nada acerca dos seus ascendentes e irmãos, pelo que se conjectura que estes possam ser israelitas. Contudo é de notar que nada nas suas obras mostra que tenha sido criado num meio de tradições israelitas. Da sua infância e adolescência nada se sabe.

Quanto à sua escolaridade, presume-se que tenha aprendido as primeiras letras em Portugal e os estudos universitários tenham sido feitos em Portugal e Espanha, mais precisamente em Salamanca.

---

<sup>18</sup> Fonte: < [http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Pedro\\_Nunes.png](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Pedro_Nunes.png) > 21/04/2013

Pedro Nunes estudou medicina mas não se sabe se fez o bacharelato em Salamanca ou Lisboa. Sabe-se apenas que, após o bacharelato, concluiu em Lisboa a licenciatura em 1532 e depois o Doutoramento.

Pedro Nunes teve alguma atividade universitária em Lisboa mas nos documentos apenas se depreende que teria somente ensinado matérias filosóficas.

E 16 de novembro de 1529, com 27 anos, foi nomeado cosmógrafo do reino. Ainda neste ano, pouco tempo depois, a 4 de dezembro, ganha um concurso para a cadeira de Filosofia Moral na Universidade de Lisboa.

Em 1531, por encargo do rei D. João III, começa a ensinar os infantes D. Luís e D. Henrique, o futuro cardeal-rei.

Em 1537 obtém autorização do rei para mandar imprimir todas as obras que tivesse escrito. Nesse ano, em dezembro, publica Tratado da Sphera, em língua portuguesa.

Em 1542 publica, a que é considerada a sua obra-prima, De Crepusculis ou Tratado dos Crepúsculos.

Em 1546 publica, em Coimbra, o De Erratis Orontii Finae.

Pouco tempo depois, a 22 de dezembro de 1547, é nomeado cosmógrafo-mor do reino.

Mais tarde, em 1566, faz uma ampliação do seu Tratado da Sphera em Petri Nonni Salaciensis Opera, que foi apenas publicado em Basileia. Um ano depois, em 1567, publica o Libro de Algebra.

Não consegue cumprir o convite feito pelo papa Gregório XII, em 1577 de se pronunciar sobre a possível reforma do calendário juliano, pois acaba por morrer em 1578.

### 5.3.3. As fontes livrescas de Pedro Nunes

A fonte é Ventura (1985).

Parte das fontes de Pedro Nunes foram estudadas ao longo deste trabalho.

Entre elas figuram os nomes maiores de: Teodósio (escreveu as Esféricas), Menelau, Apolónio (escreveu o Tratado das Secções Cónicas), Eratóstenes (mediu o arco compreendido entre Alexandria e Siena), Platão e Eudóxio de Cnido (escreveram obras de Matemática Pura aplicada à Astronomia) e Ptolomeu.

Já na Espanha muçulmana, temos: o cientista árabe Al-Petrágio, que escreve o Tratado sobre um sistema dos Orbes Homocêntricos com a Terra, trabalho original representando o movimento do Sol, da Lua e dos Planetas, e que teve bastante sucesso entre os intelectuais renascentistas, como foi o caso de Pedro Nunes (que não deixou de o criticar na sua obra De arte ataque ratione navigandi); natural de Sevilha, o matemático Geber (Gabir ibn Aflak), que comentou, ampliou e atualizou o Almagesto de Ptolomeu; Azarquiel (ou Al-Zarkali), muçulmano natural de Toledo, século XI, que escreveu o Tratado de Astronomia.

De Bagdad, sede do império oriental árabe, aparecem trabalhos de astronomia de Albaténio, Nassir-Eddin e Abū'l-Wafā.

Na Europa renascentista são de salientar o alemão Jorge Purbáquio, o alemão Regiomontano e o inglês João Sacrobosco.

D. Raimundo, arcebispo de Toledo prestou um grande serviço à causa da divulgação da ciência quando incumbiu João de Luna e Gerardo de Cremona da tradução para latim das obras mais significativas dos gregos e dos árabes, traduções que foram policopiadas e, com o aparecimento da imprensa, divulgadas.

Foram ainda fonte de Pedro Nunes:

- as Tábuas Afonsinas e aos Libros del saber de Astronomia;
- o Libro de las Partidas (obra atribuída ao Rei Afonso X e que foi preparada para o ensino do mareantes);
- o Esmeraldo de situ Orbis (livro manuscrito da autoria de Duarte Pacheco Pereira só divulgado pela imprensa em 1892);
- os trabalhos do Mestre Filipe, primeiro professor de astronomia da Universidade de Lisboa e de José Vizinho, cosmógrafo de D. João II;
- o Livro da Marinharia de João de Lisboa, divulgado apenas pela imprensa em 1903;
- o Tratado da Esfera y del arte de marear de Francisco Faleiro (judeu natural da Covilhã);
- o Repertório dos tempos de Valentim Fernandes;
- a Composição Magna e Almanach perpetuum celestium motum e Regimento do Astrolábio do judeu Abraão Zacuto.

#### 5.3.4. Bibliografia de Pedro Nunes

As fontes são Pedro Nunes, Obras<sup>19</sup>, Leitão (2002), Lourenço e Espinho (2002) e o Site Web Anotações ao Tratado da Sphera, cujo conteúdo é da autoria de Joaquim de Carvalho (1892-1958).

As obras de Pedro Nunes são compostas por traduções, comentários e escritos originais.

##### a) Tratado da Sphera:

Esta obra foi publicada em português em Lisboa, em 1537, sendo dedicada ao infante D. Luís.

---

<sup>19</sup> A edição moderna das Obras de Pedro Nunes foi publicada em 2002 em Lisboa pela Academia das Ciências de Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian. Ao longo do trabalho, usaremos a designação abreviada *Pedro Nunes. Obras* indicando o volume em questão, quando pertinente.

O Tratado da Sphera é constituído por três obras traduzidas do latim e anotadas por Pedro Nunes sendo elas: *Da Sphera* do monge inglês João de Sabroscosco, *Theorica do Sol e da Lua* de Púrbaquio e *Livro Primeiro de Geographia* de Ptolomeu.

Pedro Nunes terá sido levado a fazer estas traduções por alguma destas três razões: proveito material, dever moral resultante do seu cargo de cosmógrafo ou, como diz na dedicatória ao Infante D. Luís, prazer espiritual em difundir a Ciência, mesmo nos assuntos que não o entusiasmavam.

A parte mais interessante destas traduções é constituída pelas notas que servem de esclarecimento ao texto. Destas notas tem, para este trabalho, interesse a nota final à tradução do livro de Sacrobosco: trata-se da parte mais interessante e valiosa do primeiro trabalho de Pedro Nunes e que adquiriu grande e justificada fama dada a difusão de várias traduções de Élie Vinet, como veremos, pormenorizadamente, à frente.

Fazem parte ainda deste Tratado duas obras originais de Pedro Nunes:

- *Tratado em defesam da carta de marear* – neste tratado Pedro Nunes define as condições da construção de mapas, apresenta o processo para determinar a declinação magnética e o processo para determinação de latitudes, baseado nas alturas extra meridianas do Sol. O instrumento de sombras é descrito nesta obra.

- *Tratado sobre certas dúvidas de navegação* – neste tratado, Pedro Nunes responde a dúvidas colocadas por Martim Afonso de Sousa suscitadas pela sua viagem ao Brasil.

Estes dois textos são excecionais e assinalam a entrada em cena de um pensador de primeiro nível.

Nesta obra, Pedro Nunes ocupa-se das linhas de rumo, que vieram a ter grande reflexo na cartografia.

#### b) De Crepusculis

É uma das quatro obras de Pedro Nunes que foi publicada em latim em 1542.

De Crepusculis é um tratado de astronomia esférica que resolve o problema da duração dos crepúsculos para um dado lugar da Terra e para uma determinada posição do Sol.

Nesta obra, Pedro Nunes determina a duração do crepúsculo e dá a solução para o problema do menor crepúsculo, isto é, encontra o dia em que a duração do crepúsculo é mínimo, num determinado ponto da Terra.

Ainda no De Crepusculis, dadas a latitude e a declinação do Sol, determina o ângulo horário do Sol. Este problema não era novo e consistia, teoricamente, em determinar a medida de um ângulo interno de um triângulo esférico, do qual se conheciam três lados.

Nesta obra, Pedro Nunes propõe construir rigorosamente um instrumento com o qual possa determinar rigorosamente as alturas: o nócio.

#### c) De Erratis Orontii Finae

Esta obra foi publicada em 1546, em Coimbra.

Aqui Pedro Nunes refuta os erros que Orêncio Fineu cometeu quando considerou ter resolvido cinco importantes problemas matemáticos, na sua obra *O Quadratura Circuli* de 1543.

Para além disso, Pedro Nunes aborda a descoberta de Platão para determinar os dois meios proporcionais e duplicar o cubo; aborda também a demonstração que Arquimedes fez acerca da razão entre a circunferência e o seu diâmetro.

Dá uma explicação sobre as definições do livro *V* dos Elementos de Euclides e a razão pela qual a partir dos movimentos da Lua se conclui a diferença de longitude dos lugares.

Trata ainda, nesta obra, da construção e uso do relógio noturno, vertical e horizontal, que foram mal concebidos por Orêncio Fineu.

#### d) Libro de Álgebra

Esta obra, dedicada ao cardeal Infante D. Henrique, foi publicada no ano de 1567, em castelhano, francês e latim.

Esta obra está dividida em três partes: na primeira parte, são estabelecidas as regras da resolução das equações de primeiro e segundo graus, a uma incógnita; na segunda parte, Pedro Nunes ocupou-se do cálculo algébrico, da radiciação e das proporções; na terceira parte, que é a mais longa, Pedro Nunes retomou a resolução das equações, incluindo as de terceiro grau.

Pedro Nunes preocupa-se com o rigor e a clarividência dos conceitos que introduz e com a justificação das regras que utiliza.

A álgebra de Pedro Nunes encontra-se ligada à geometria, o que justifica a não-aceitação de Pedro Nunes do número negativo. Embora Pedro Nunes tivesse pressentido a necessidade do zero, nunca o declarou abertamente.

#### e) Obras perdidas.

As obras perdidas a que Pedro Nunes se refere explicitamente e às quais estudiosos do matemático se referem com maior destaque são:

- De ortu et occasu signorum [Sobre o nascimento e o ocaso dos signos];
- Geometria dos triângulos sphaeraes;
- De astrolábio opus demonstrativum [Do astrolábio, tratado demonstrativo];
- De planisphaerio geométrico [Do planisfério geométrico];
- De proporcione in quintum Euclidis [Da proporção ao *V* de Euclides];
- De globo delineando ad navigandi artem [Do traçado das pomas para a arte de navegar];
- Tradução, muito possivelmente comentada, do *De Architectura*, de Vitruvius.

Das obras perdidas teria, para nós, particular interesse a *Geometria dos triângulos sphaeraes*.



Esta obra é referida por Pedro Nunes por várias ocasiões. Em Pedro Nunes. Obras, vol. I, no final da última anotação ao texto de Sacrobosco encontramos:

*“Posto que eu toda via escreui a Geometria dos triangulos Sphaeraes largamente antes que de Alemanha nos mandassem a Espanha os livros de Gebre e Montereio que na mesma materia falam: e despoys de lidos nam rompi o que tinha escripto”*

Há nova referência a esse estudo no Tratado sobre certas dúvidas da navegação. Aí encontramos:

*“nos triangulos de linhas curuas he da maneira que digo: como no tratado que sobre elles escreui demostrey”*

e mais adiante:

*“como demostrey na .xxiiij. proposição do primeiro liuro dos triãgulos sphaeraes.”*

Como vemos, é o próprio Pedro Nunes que nos informa que já tinha composto um “tratado” sobre triângulos esféricos, matéria de importância crucial em qualquer estudo de astronomia ou de náutica teórica. Para além de afirmar que escrevera “largamente” sobre este assunto, do modo como cita esta sua obra só pode entender-se que seria conhecida de outros. Não faria sentido remeter o leitor para uma proposição de um tratado que não era conhecido de ninguém. Mas por outro lado, não há indicação que de que essa obra já tivesse sido impressa. Tal significa que o seu tratado sobre triângulos esféricos, embora manuscrito, tinha uma redação suficientemente acabada para ser dada a conhecer: o manuscrito circulava. Este modo de proceder foi encontrado relativamente a outros trabalhos de Pedro Nunes.

### 5.3.5. A Trigonometria Plana em Pedro Nunes

Recorremos aqui às *Notas* de Manuel A. Peres Júnior (1888-1968) que se encontram em Pedro Nunes. Obras, vol. II.

Começemos por dar conta de alguma da linguagem utilizada por Pedro Nunes.

Abundam nos textos as seguintes referências:

- às unidades com que se medem os arcos de círculo;
- o quadrante é vulgar;
- o semicírculo aparece algumas vezes;
- o grau e as suas subdivisões encontram-se a cada passo: à primeira divisão do grau chamamos hoje em dia minuto mas Pedro Nunes usa “miúdo” no Tratado da Sphaera; estes minutos chamaram-se os primeiros para distinguir de outras frações ainda mais miúdas como a sexagésima parte do primeiro minuto, chamada segundo minuto e a sexagésima parte desta, chamada terceiro minuto; com o uso simplificaram-se as expressões que ficaram reduzidas a minuto, segundo e terceiro, respetivamente, tal como aparece no Tratado da Sphaera e no De Crepusculis.

Nas suas demonstrações, Pedro Nunes serve-se de duas funções circulares: o seno recto e o seno verso.

#### 5.3.5.1) Tratado da Sphera e a *Annotação sobre as derradeiras palauras do Capitulo dos Climax*

Apenas o seno reto é usado no Tratado da Sphera.

Os arcos complementares não têm nome especial e designam-se por “o arco que fica tirando ho de nouenta graus”.

Pedro Nunes usa o cosseno mas sem lhe dar este nome.

Relativamente aos senos, Pedro Nunes é muito rigoroso na linguagem: o arco procurado nas proposições aparece sempre dado pelo seu seno e Pedro Nunes, depois de atingido este resultado, quase nunca se esquece de acrescentar que “o arco é conhecido pela tábua do seno”.

Pedro Nunes indica com frequência a unidade em que expressa o seno recto (e o seno verso): tantas partes das que o semidiâmetro tem cem mil, ou das que o seno total tem cem mil, ou a tábua que dá o seno total igual a cem mil. Este valor para o raio foi também usado por outros astrónomos, como Regiomontanus (1436-1476) e Copérnico (1473-1543) segundo Van Brummelen, *The mathematics of the heavens and the earth* (2009). Contudo não encontramos estas tabelas. Encontramos antes uma tabela de senos de Petrus Apianus (1495-1552) de 1534 cujos valores coincidem com os utilizados por Pedro Nunes. A tabela de Petrus Apianus segue em anexo.

Vejamos onde podemos encontrar estas utilizações:

.....  
*Annotação sobre as derradeiras palauras do Capitulo  
dos Climax*  
.....

A fonte é Leitão e Almeida (2012)

Esta *Annotação* de Pedro Nunes foi muito conhecida em toda a Europa graças à difusão trazida pela versão latina de Élie Vinet (1509-1584), que a inclui nas muitas edições do Tratado da Sphera que promoveu. Desta forma, o texto que, originalmente, tinha sido escrito em português passa a estar acessível ao leitor culto em toda a Europa pela edição em latim. Vinet também foi responsável por introduzir a obra de Pedro Nunes nos circuitos intelectuais de Bordéus, que era na altura um dos polos mais ativos das relações intelectuais entre a França e a Península Ibérica. A *Annotação* também ficou bem conhecida entre os matemáticos jesuítas.

O que Pedro Nunes demonstra é:

*A largura dos climas diminui quando eles se aproximam do polo.*

### 5.3.5.1.1) PRÉ- REQUISITOS

#### *Latitude Geográfica e Astronómica*

Pedro Nunes no Tratado da Sphera refere-se a “graus de altura do polo”. Trata-se da latitude astronómica do observador.

A latitude astronómica de um observador é a distância angular entre o horizonte do observador e o Polo Norte.

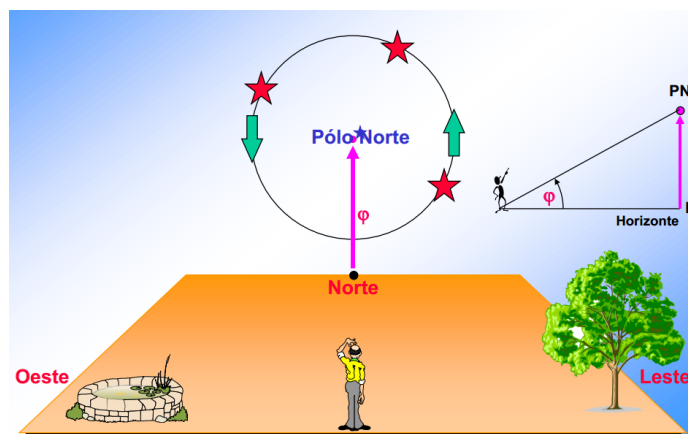


Ilustração 75 - Latitude Astronómica<sup>20</sup>

A latitude geográfica de um observador é a distância angular entre o equador, medida em graus, minutos e segundos, e o paralelo em que se encontra o observador, podendo variar entre 0° e 90° para Norte ou para Sul. Por exemplo, Lisboa está à latitude de 38° 4' Norte.

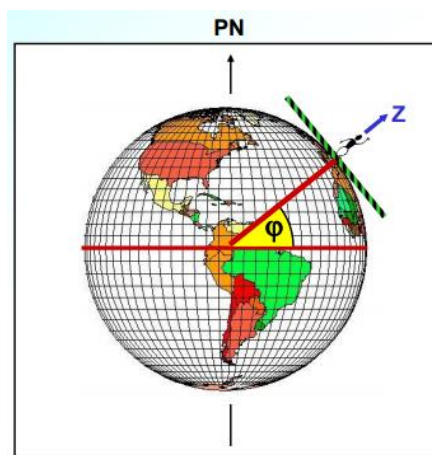


Ilustração 76 - Latitude Geográfica

<sup>20</sup> As ilustrações 75,76 e 77 foram retiradas de  
[http://www.astro.iag.usp.br/~jorge/aga205\\_2011/07\\_LatGeAst.pdf](http://www.astro.iag.usp.br/~jorge/aga205_2011/07_LatGeAst.pdf)

As latitudes astronómica e geográfica são iguais, como vemos na ilustração seguinte.

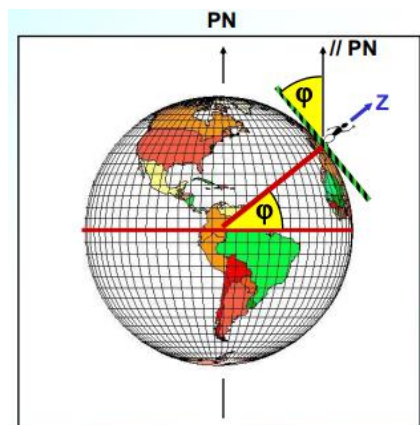


Ilustração 77 - Relação entre a latitude astronómica e geográfica

### Declinação do Sol

O ângulo formado entre a linha imaginária do Equador e a linha que liga o centro da Terra ao Sol denomina-se Declinação Solar ( $\delta$ ).  $\delta$  indica a latitude na qual o Sol “está a passar” num determinado instante no seu movimento aparente N-S.

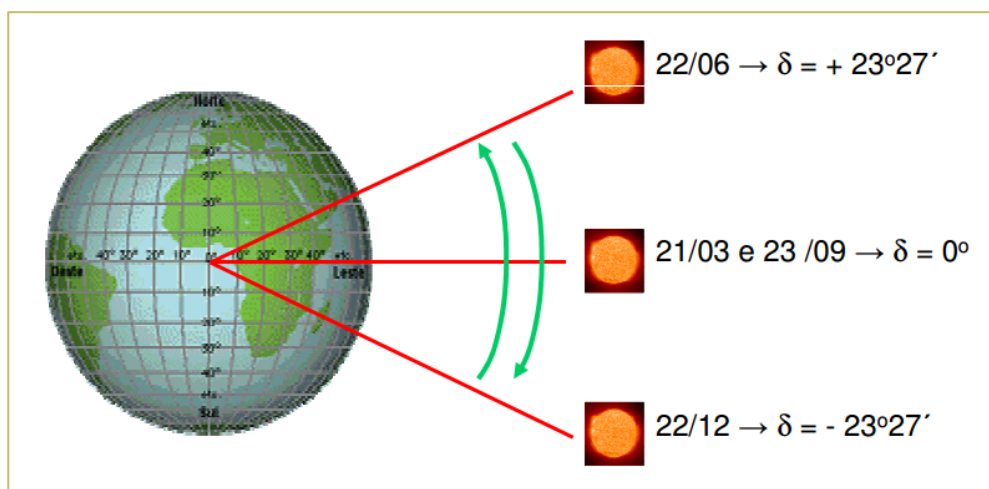
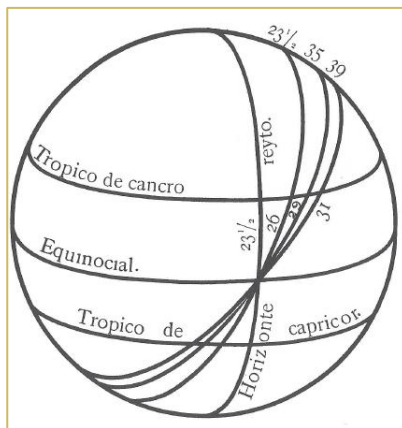


Ilustração 78 - Declinação do Sol<sup>21</sup>

<sup>21</sup> Fonte: <<http://www.lce.esalq.usp.br/aulas/lce306/Aula2.pdf>> 1/08/2013

### Mais vocabulário da Annotação

Recorrendo à *Astronomici Introductorii* de Spaera Epitome, vamos dar conta de algum do vocabulário que é utilizado ao longo da *Annotação* e que poderá facilitar o acompanhamento da mesma.



**Ilustração 79 - Modelo de Pedro Nunes:  
paralelos e horizontes**

- Acerca dos círculos da esfera:

Dos círculos da esfera uns são maiores e outros menores.

Círculo maior é aquele que divide a esfera em partes iguais. Os círculos maiores são seis: o equador ou equinocial, o zodíaco, dois coluros, o meridiano e o horizonte.

Círculo menor é o que corta a esfera desigualmente. Os círculos menores são quatro: o círculo ártico, círculo de Câncer, círculo de Capricórnio e círculo antártico.

- Acerca do zodíaco:

Consta de três círculos equidistantes, sendo que os dois das extremidades delimitam a largura do zodíaco. O círculo do meio é a eclíptica e corta o equador em dois pontos opostos. A longitude do zodíaco divide-se em 12 partes iguais e que se designam signos e cada signo em 30 partes ou graus.

- Acerca do meridiano:

É um círculo que se traça pelos polos e por um ponto na vertical da cabeça do observador.

- Acerca do horizonte:

É o círculo maior que separa a parte visível da que não se vê. O horizonte reto passa pelos polos, cortando o equador em ângulos retos e é o dos homens que se encontram no próprio equador. O horizonte oblíquo não passa pelos polos e é o dos homens que habitam aquém e além do equador.

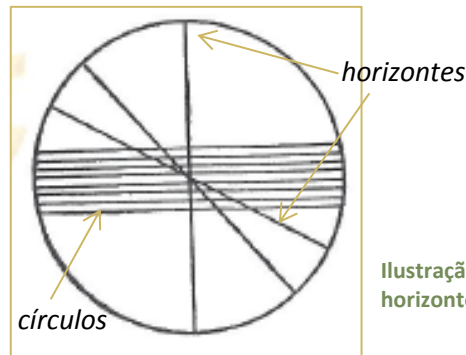


Ilustração 80 - Modelo de Pedro Nunes: círculos e horizontes

- Acerca dos quatro círculos menores e das cinco zonas:

O círculo de Câncer é um círculo menor onde se dá o dia mais longo e a noite mais breve do ano inteiro.

O círculo de Capricórnio é um círculo menor onde se verifica noite mais longa e o dia mais curto do ano inteiro

Os quatro círculos, Câncer, Capricórnio, Ártico e Antártico são equidistantes. A superfície do céu reparte-se por estes círculos em cinco zonas as quais correspondem na mesma quantidade no globo terreno. A zona que nós habitamos é a que se situa entre o trópico de Câncer e o círculo ártico.

- Acerca da divisão do dia natural:

O dia natural divide-se em dia e noites artificiais.

O dia artificial é o tempo de demora do Sol acima do horizonte.

A noite artificial é o tempo de demora do Sol abaixo do horizonte.

A duração dos dias e noites artificiais é representada mediante as grandezas dos arcos dos círculos dos dias naturais, que são deixados no hemisfério superior e inferior pela variação da seção do horizonte:

- no caso do horizonte reto, que vem dos polos, corta estes círculos em partes iguais. Assim os arcos deixados acima e abaixo do horizonte são iguais pelo que os dias têm a mesma duração das noites.

- o horizonte oblíquo corta desigualmente todos os círculos dos dias naturais, exceto o equador, deixando os arcos maiores acima do horizonte quando o Sol se afasta para o polo visível. Por esse motivo, quando o sol avança pelo semicírculo boreal do zodíaco, os dias são maiores que as noites e tanto maiores quanto mais uma região se afasta do equador. Se o Sol se afasta para o polo oculto, os arcos acima do horizonte são menores que abaixo o horizonte.

- Daquilo que sucede nas diferentes habitações, isto é os Climas:

Pedro Nunes usa o conceito de Clima que era vulgar na época: um “clima é uma certa zona ou região terrestre intercetada por dois paralelos ao equador, ao longo da qual a grandeza dos dias varia mas com diferença sensível”. Pedro Nunes considera, seguindo a tradição helénica, que o hemisfério norte está dividido em sete climas.

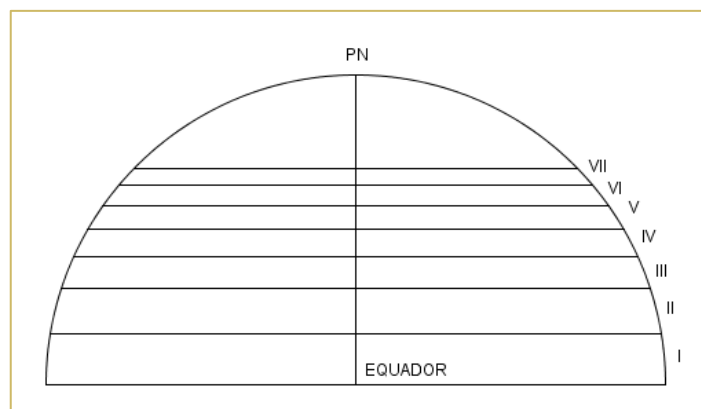


Ilustração 81 - Os sete Climas

Pedro Nunes apresenta uma tabela onde podemos encontrar os sete climas que podemos observar abaixo. Os climas estão relacionados com uma cidade e que é o lugar onde se dá o cruzamento com o meridiano de Alexandria. Estão registadas as durações do maior dia do ano em cada uma dessas cidades e a latitude do clima. Verificamos que, de clima para clima, há uma variação de meia hora na duração do maior dia do ano.

|                                  |           | Duração do maior dia |    | Latitude do clima |    |
|----------------------------------|-----------|----------------------|----|-------------------|----|
|                                  |           | ho.                  | m. | gr.               | m. |
| Primeiro clima por Méroe         | princípio | 12                   | 45 | 12                | 45 |
|                                  | meio      | 13                   | 0  | 16                | 40 |
|                                  | fim       | 13                   | 15 | 20                | 30 |
| Segundo clima por Siene          | princípio | 13                   | 15 | 20                | 30 |
|                                  | meio      | 13                   | 30 | 24                | 15 |
|                                  | fim       | 13                   | 45 | 27                | 30 |
| Terceiro clima por Alexandria    | princípio | 13                   | 45 | 27                | 30 |
|                                  | meio      | 14                   | 0  | 30                | 45 |
|                                  | fim       | 14                   | 15 | 33                | 40 |
| Quarto clima por Rodés           | princípio | 14                   | 15 | 33                | 40 |
|                                  | meio      | 14                   | 30 | 36                | 24 |
|                                  | fim       | 14                   | 45 | 39                | 0  |
| Quinto clima por Roma            | princípio | 14                   | 45 | 39                | 0  |
|                                  | meio      | 15                   | 0  | 41                | 20 |
|                                  | fim       | 15                   | 15 | 43                | 30 |
| Sexto clima por Borístenes       | princípio | 15                   | 15 | 43                | 30 |
|                                  | meio      | 15                   | 30 | 45                | 24 |
|                                  | fim       | 15                   | 45 | 47                | 15 |
| Sétimo clima pelos Montes Rifeus | princípio | 15                   | 45 | 47                | 15 |
|                                  | meio      | 16                   | 0  | 48                | 40 |
|                                  | fim       | 16                   | 15 | 50                | 10 |

Ilustração 82 - Tabela de Climas, Pedro Nunes

#### 5.3.5.1.2) CONSIDERAÇÕES ACERCA DA ANOTAÇÃO

A fonte é Henrique e Almeida (2012).

Em *Da Sphaera*, Sacrobosco, na parte relativa aos climas, calcula a largura dos vários climas e, no final, diz que a largura do primeiro clima é maior que a do segundo e que a do segundo clima é maior que a do terceiro, e assim por diante. Como Sacrobosco não escreve mais nada sobre o assunto, à semelhança de todos os outros autores, Pedro Nunes decide demonstrar este resultado:

*“O que este autor nesta parte diz da largura dos climas jr diminuindo/crecendo a quantidade dos dias ygualmente de mea em mea hora: dizem todollos outros autores que nesta materia falão: mas nenhũ ho demonstra. E portãto quero fazer disto demonstração: e sera a mais facil que eu poder e sem muita Geometria de linhas curuas”.*<sup>22</sup>

Na *Anotação sobre as derradeiras palauras do Capitulo dos Climas* encontramos, pela primeira vez, uma demonstração matemática rigorosa de que a “largura” dos climas decresce à medida que se avança do equador para o polo. Por outro lado, esta anotação “tipifica de maneira exemplar a personalidade matemática de Pedro Nunes” (Leitão e Almeida) dado que Pedro Nunes considera que só se deveriam usar resultados que estivessem matematicamente demonstrados. Pedro Nunes volta a referir-se a esta demonstração no *De Crepusculis* e usa o mesmo tipo de argumentação no *In Theoricis Planetarum Georgii Purbachii Annotationes*.

A *Anotação* pode ser dividida em cinco partes:

- primeira parte: demonstração matemática de uma proposição auxiliar;
- segunda parte: a demonstração do resultado da largura dos climas;
- terceira parte: um exemplo numérico;
- quarta parte: um método para determinar a duração do dia em qualquer dia do ano;
- quinta parte: a descrição de um “estromêto”.

De notar que Élie Vinet só inseriu nas suas edições latinas a demonstração do resultado da largura dos climas, pelo que só ela foi difundida.

#### 5.3.5.1.3) PRIMEIRA PARTE: A DEMONSTRAÇÃO DE UM RESULTADO AUXILIAR

Iremos traduzir em linguagem atual uma parte destas anotações socorrendo-nos do artigo, já mencionado, de Henrique Leitão e Bruno Almeida, quando necessário.

---

<sup>22</sup> Pedro Nunes. Obras, vol. I.



O resultado auxiliar é obtido a partir da seguinte construção:

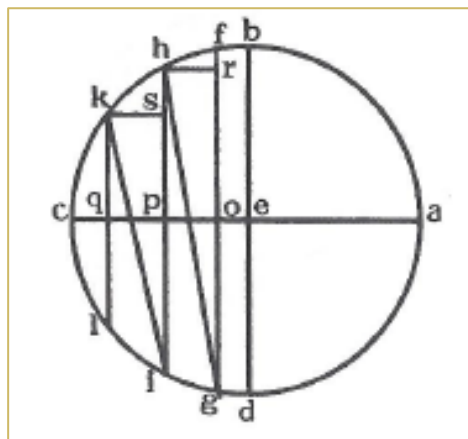


Ilustração 83 - Demonstração de um resultado auxiliar, figura de apoio de Pedro Nunes

Começam-se por traçar no círculo  $abcd$  dois diâmetros que no centro fazem dois ângulos retos, ficando o círculo dividido em quatro quartas (quartos de círculo); em dois quartos de círculo  $bc$  e  $dc$ , tomamos arcos iguais começando de  $b$  e de  $d$  como sejam  $bf$  e  $dg$ ,  $fh$  e  $gi$ ,  $hk$  e  $il$ ; unimos  $f$ ,  $h$ ,  $k$  com os seus correspondentes  $g$ ,  $i$ ,  $l$ , obtendo no semidiâmetro  $ec$  nos pontos  $o$ ,  $p$ ,  $q$ , respetivamente.

O resultado auxiliar a demonstrar é:

*Se a linha [segmento de reta]  $pq$ , que está mais afastada do centro que  $op$ , for maior que  $op$ , o arco  $hk$  é maior que o arco  $fh$  e, analogamente, se  $op$  for maior que  $eo$ , o arco  $fh$  será maior que o arco  $bf$ .*

*Ou seja: Se um segmento mais afastado do centro da circunferência é maior que um segmento mais próximo do centro da circunferência, então o arco correspondente ao primeiro segmento é maior que o arco correspondente ao segundo arco.*

### **Demonstração:**

Consideremos que  $pq > op$ .

1. Mostremos que  $\text{arc } hk \neq \text{arc } fh$ .

Traçam-se as perpendiculares  $hr$  e  $ks$  a partir de  $h$  e  $k$  sobre  $fg$  e  $hi$  e unem-se  $h$  a  $g$  e  $k$  a  $i$ . Obtemos dois triângulos  $hgr$  e  $kis$ , que são retângulos.

Considere-se que  $\text{arc } fh = \text{arc } hk$ . Se  $\text{arc } fh = \text{arc } hk$ , como a arcos iguais correspondem ângulos iguais, então os ângulos  $rgf$  e  $sik$  são iguais. Os outros ângulos  $rhg$  e  $ski$  também são iguais. Assim, pelo critério AA, os triângulos  $hgr$  e  $kis$  são semelhantes. Nos triângulos equiângulos, os lados que contêm ângulos iguais são proporcionais. Assim  $\frac{rg}{si} = \frac{rh}{sk}$ . Como  $rg > si$

então  $rh > sk$  e, consequentemente,  $op > pq$  (pois  $rh = op$  e  $sk = pq$ ). Chegamos a uma contradição pois se  $op > pq$  então  $arc fh \neq arc hk$ , o que contradiz a hipótese inicial.

2. Também não se pode dizer que  $arc hk$  é menor que  $arc fh$ . Vejamos porquê:

Começamos por considerar que  $arc hk < arc fh$ . Acrescentemos a  $k$  uma porção de arco,  $kk'$ , de forma que  $arc hk' = arc fh$ . Tracemos um segmento de reta unindo o extremo deste arco ao seu correspondente no quarto de círculo  $dc$ .

Esse segmento traçado no semidiâmetro  $ec$ , é maior que  $pq$  porque  $pq$  é uma parte desse segmento.

Usando uma argumentação semelhante à que vimos em 1., concluímos que  $pq' < op$ . Chegamos a uma contradição porque se  $op > pq'$  então  $arc fh \neq arc hk'$ .

Nota: para facilitar a leitura usamos os pontos  $k'$  e  $q'$  mas estes não constam do texto original.

3. Assim nem  $arc hk$  é menor que  $arc fh$  nem é igual, donde resulta que é maior.

Consideremos que  $pq = op$ .

Se considerarmos que  $pq = op$ , como Pedro Nunes diz “pela mesma arte”, ou seja da mesma forma, demonstramos que  $arc hk > arc fh$ .

1. Mostremos que  $arc hk \neq arc fh$ .

Usando o mesmo diagrama, considere-se que  $arc fh = arc hk$ . Se  $arc fh = arc hk$ , como a arcos iguais correspondem ângulos iguais, então os ângulos  $rgf$  e  $sik$  são iguais. Os outros ângulos  $rhg$  e  $ski$  também são iguais. Assim pelo critério AA os triângulos  $hgr$  e  $kis$  são semelhantes. Nos triângulos equiângulos, os lados que contêm ângulos iguais são proporcionais. Assim  $\frac{rg}{si} = \frac{rh}{sk}$ . Como  $rg > si$  então  $rh > sk$  e consequentemente  $op > pq$  (pois  $rh = op$  e  $sk = pq$ ). Chegamos a uma contradição pois  $op = pq$  e então  $arc fh \neq arc hk$ , o que contradiz a hipótese inicial.

2. Também não se pode dizer que  $arc hk$  é menor que  $arc fh$ . Vejamos porquê:

Começamos por considerar que  $arc hk < arc fh$ . Acrescentemos a  $k$  uma porção de arco,  $kk'$ , de forma que  $arc hk' = arc fh$ . Tracemos um segmento de reta unindo o extremo deste arco ao seu correspondente no quarto de círculo  $dc$ .

Esse segmento traçado no semidiâmetro  $ec$ , é maior que  $pq$  porque  $pq$  é uma parte desse segmento.

Usando uma argumentação semelhante à que vimos em 1., concluímos que  $pq' < op$ . Chegamos a uma contradição porque se  $op > pq'$  então  $arc fh \neq arc hk'$ .

3. Assim nem  $hk$  é menor que  $fh$  nem é igual, donde resulta que é maior.

#### 5.3.5.1.4.) SEGUNDA PARTE: A DEMONSTRAÇÃO DO RESULTADO DA LARGURA DOS CLIMAS

A fonte Leitão e Almeida (2002).

Pedro Nunes irá analisar a duração dos dias mais longos ao longo do ano para três latitudes igualmente separadas.

Considere-se a Ilustração 84 e a Ilustração 85.

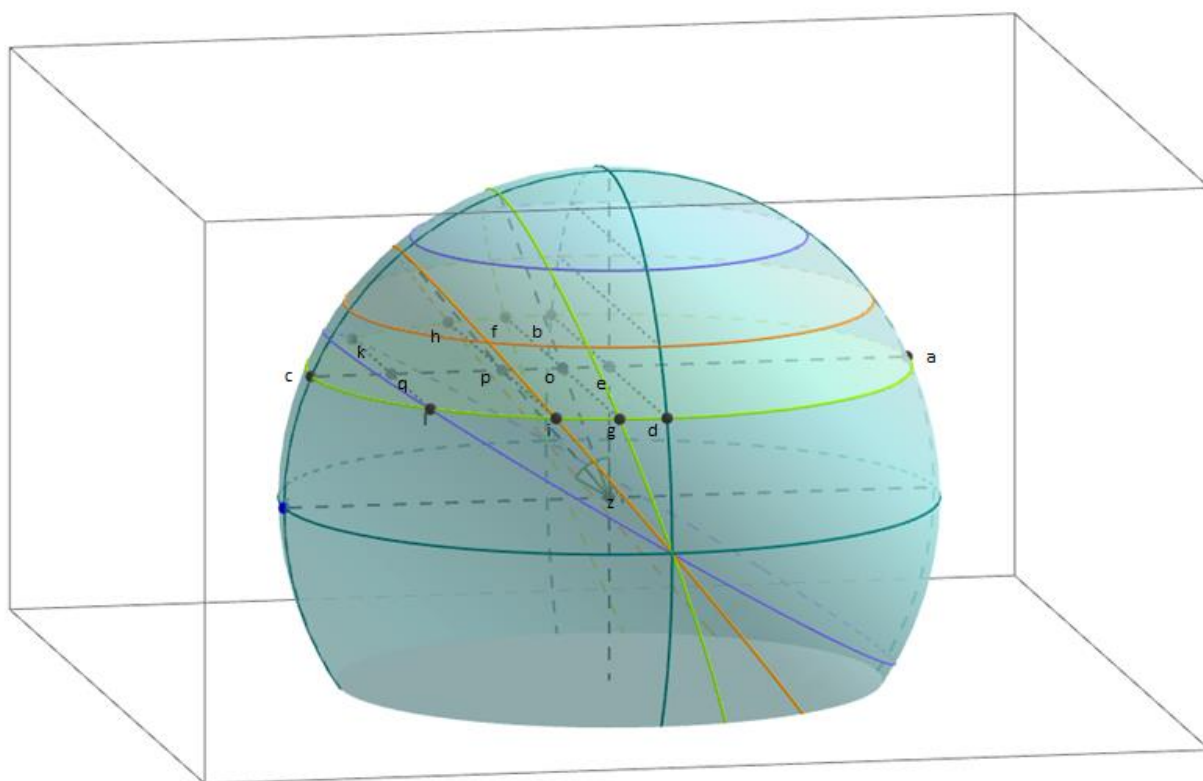


Ilustração 84 - Demonstração da largura dos climas, modelo tridimensional

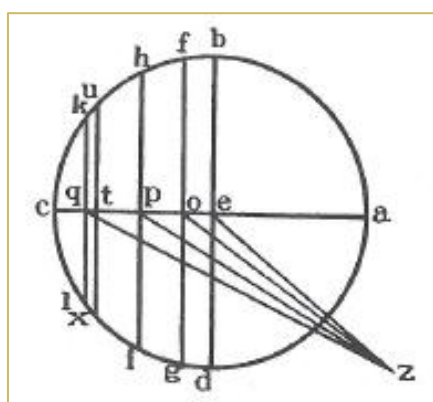


Ilustração 85 - Demonstração da largura dos climas, modelo bidimensional de Pedro Nunes

Na Ilustração 84 e na Ilustração 85:

- ✓ o círculo  $abcd$  representa um paralelo qualquer no hemisfério Norte.;
- ✓ o meridiano e o horizonte reto intersectam-se no centro deste círculo em ângulos retos de tal forma que o círculo fica dividido em quatro quartos de círculo sendo  $ac$  a intersecção do meridiano com o círculo  $abcd$  e  $bd$  a intersecção do horizonte com o círculo  $abcd$ ;
- ✓ o ponto  $z$  representa o centro da esfera celeste;
- a linha  $zo$  é a intersecção entre o horizonte oblíquo que passa pelo ponto  $o$  e o círculo correspondente ao meridiano de lugar que corta os pontos  $c$  e  $a$ ;
- ✓  $fog$  é a linha de intersecção entre o horizonte oblíquo e  $abcd$ ;
- ✓ o ângulo  $ezo$  é a altura do polo (que corresponde à latitude astronómica do observador);

Imaginem-se agora mais dois horizontes oblíquos, correspondentes a observadores em latitudes mais elevadas em que:

- a intersecção entre o horizonte e o meridiano de lugar passa pelos pontos  $p$  e  $q$  de forma que os ângulos  $ezo$ ,  $ozp$  e  $pzq$  sejam iguais e que a sua soma seja igual a  $ezq$ , que é a latitude astronómica do terceiro horizonte;
- $ezp$  é a latitude astronómica do segundo horizonte;
- os arcos  $bf$ ,  $fh$  e  $hk$  (e os correspondentes  $dg$ ,  $gi$  e  $il$ ) representam porções de arco diurno do Sol. Estes segmentos de arco podem ser tomados como quantidades de tempo e pela definição de clima o seu valor é de meia hora.

Consideremos o triângulo  $oqz$ . Neste triângulo o ângulo  $ozq$  é bisetado pelo segmento  $zp$ .  $zq > zo$  pois  $zq$  está em frente ao ângulo  $zoq$ , que é obtuso, e  $zo$  está em frente ao ao ângulo  $zqo$ , que é agudo. Usando a proposição *Elementos*, VI, 3 (Se um ângulo é bisetado por uma linha reta que intersesta a base, então os segmentos da base têm a mesma razão que os lados restantes do triângulo), obtém-se:

$$\frac{zq}{zo} = \frac{pq}{op}.$$

Como  $zq > zo$ , também  $pq > op$ .

Usando a proposição auxiliar que, antes, Pedro Nunes havia demonstrado, vem  $\text{arc } hk > \text{arc } fh$  e, assim, o  $\text{arc } il > \text{arc } gi$ . Mas por construção e pela definição de clima,  $\text{arc } hk = \text{arc } fh$ . Nas condições desta demonstração, isto é para paralelos separados por valores iguais, a diferença entre os dias mais longos não seria de meia hora - não seriam portanto climas.

Pedro Nunes vai considerar um novo arco,  $hu$  (e seu correspondente  $ix$ ), menor que  $hk$ . O segmento  $ux$  é a intersecção do horizonte e do paralelo; a intersecção de  $ux$  com o meridiano de lugar dá-se num ponto  $t$ . Este ponto  $t$ , mais próximo do ponto  $p$ , está localizado entre as linhas  $kl$  e  $hi$ , de modo a que  $\text{arc } hu = \text{arc } fh$ . Desta forma, a diferença entre paralelos terá de ser menor para que os dias mais longos correspondentes difiram exatamente meia hora. Ou seja, a *largura dos climas – distância entre*

*paralelos - é sucessivamente menor à medida que aumenta a altura do polo*, tal como Nunes pretendia demonstrar.

Pedro Nunes prossegue dizendo que acha escusada toda a geometria de linhas curvas para esta demonstração e que não há outra via tão breve! Pedro Nunes refere, em contraponto, as proposições de Gebre e do seu imitador Monterégio e as muitas coisas que Ptolomeu no Livro *II* do *Almagesto* com tantos rodeios demonstra.

### 5.3.5.1.5) TERCEIRA PARTE: UM EXEMPLO NUMÉRICO

Seguidamente, Pedro Nunes apresentou um exemplo numérico para o cálculo do *arco dg*.

Será nesta parte que encontraremos as referências à linguagem trigonométrica.

❶ Pedro Nunes começa por se referir ao triângulo retângulo *zoe*:

“o triângulo *z.o.e* tem ho ângulo *.oez.* direito: e o ângulo *.e.z.o.* contém os graus de altura do polo: e portanto ho terceiro ângulo que he *.e.o.z.* valera ho que fica para .90 que é a altura da equinocial: e poys ho lado *.e.z.* he conhecido porque he igual ao sino da declinação do paralelo *a.b.c.d*”<sup>23</sup>.

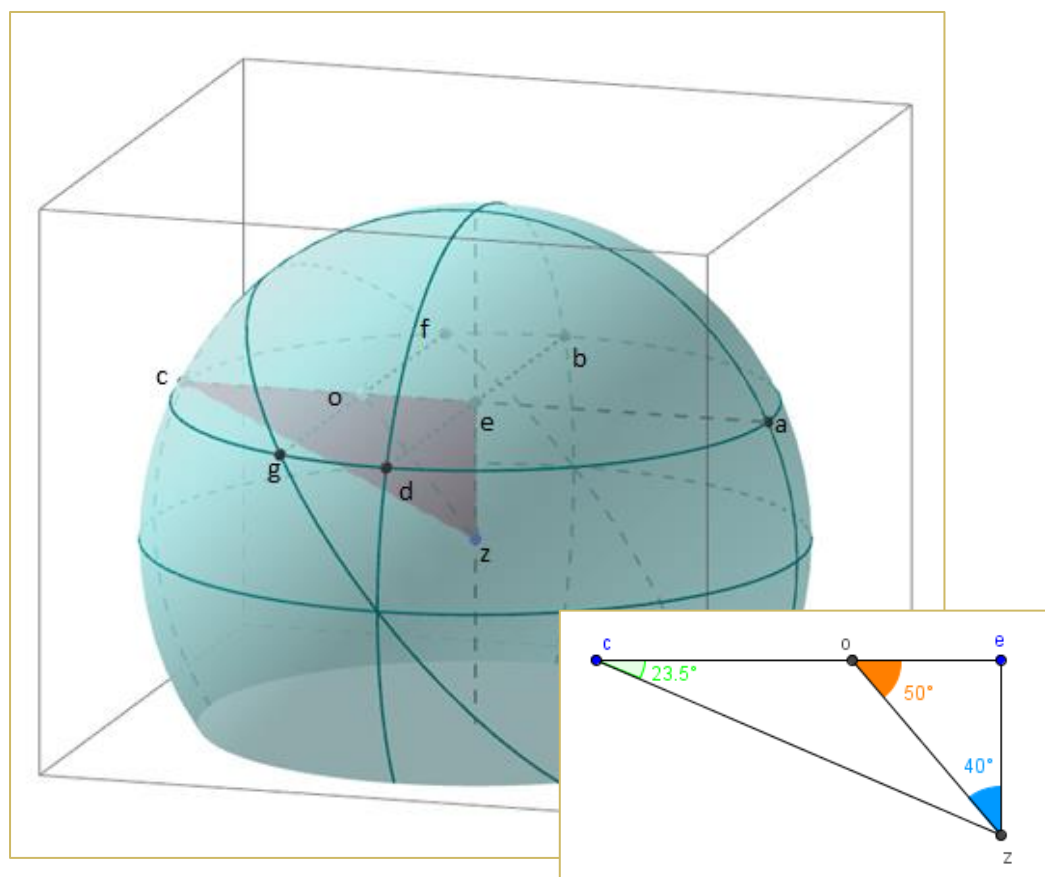


Ilustração 86 - Exemplo da aplicação do resultado de Pedro Nunes

<sup>23</sup> Pedro Nunes. Obras, vol. I.

Traduzindo em linguagem atual:

✓  $eo z = 90^\circ - ezo$  (o ângulo  $oez$  é igual a  $90^\circ$ );

✓  $ez$  é o seno da declinação  $\delta$  do paralelo correspondente ao círculo  $abcd$ .

❷ Pedro Nunes dá a regra para determinar  $eo$ :

“a regra sera multiplicar ho sino do ângulo  $.e.z.o.$  per  $.e.z.e$  e partir per o sino do angulo  $.e.o.z.$  e vira na partiçam a linha  $e.o.$  poys a proporção dos Sinos dos arcos que valem os angulos he a dos lados que estam defronte delles.”

Ou seja, usando a Lei dos senos:

$$\frac{eo}{ez} = \frac{\sin(ezo)}{\sin(eoz)} \Leftrightarrow eo = \frac{\sin(ezo) \cdot ez}{\sin(eoz)}.$$

❸ Pedro Nunes recorre a uma tabela de senos em que  $r = 100\,000$ .

❹ Terão de ser determinados  $eo = (gd)$  e  $ec (= eg)$  para ser conhecido  $\sin dg = \frac{eo}{ec}$ .

❺ Para obter o arco semidiurno máximo, soma-se o valor do *arco dg* (em unidades de tempo) a 6 horas.

Pedro Nunes vai exemplificar o procedimento anterior e fazer o cálculo para o dia mais longo num paralelo cuja altura do polo é  $\varphi = 40^\circ$  (aproximadamente a latitude de Lisboa):

-  $\sin(eoz) = \sin(90^\circ - \varphi) = \sin(90^\circ - 40^\circ) = \sin 50^\circ = 76604$ ;

-  $\sin(ezo) = \sin \varphi = \sin 40^\circ = 64278$ ;

-  $ez = \sin \delta = \sin 23,5^\circ = 39874$ .

Substituindo em  $eo = \frac{\sin(ezo) \cdot ez}{\sin(eoz)}$  vem:

$$eo = \frac{64278 \cdot 39874}{76604} = 33458.$$

Pedro Nunes apresenta como resultado 33457.

Por outro lado:

$$ec = \sin(90^\circ - \delta) = \sin(90^\circ - 23,5^\circ) = \sin 66,5^\circ = 91706.$$

Agora vem:

$$\sin(dg) = \frac{eo}{ec} = \frac{33457}{91706} \Leftrightarrow dg = 21^\circ 24' = 1^h 25' 36''.$$

Assim o valor do arco semidiurno é  $6^h + 1^h 25' 36'' = 7^h 25' 36'' \sim 7^h 26'$  e o arco diurno, que é obtido duplicando o valor obtido, é igual a  $14^h 52'$ .

#### 5.3.5.1.6) QUARTA PARTE: PROCESSO GRÁFICO PARA DETERMINAR A DURAÇÃO DO DIA EM QUALQUER MOMENTO DO ANO

O matemático português apresentou um processo gráfico que permitia obter as variáveis necessárias à determinação da duração do dia.

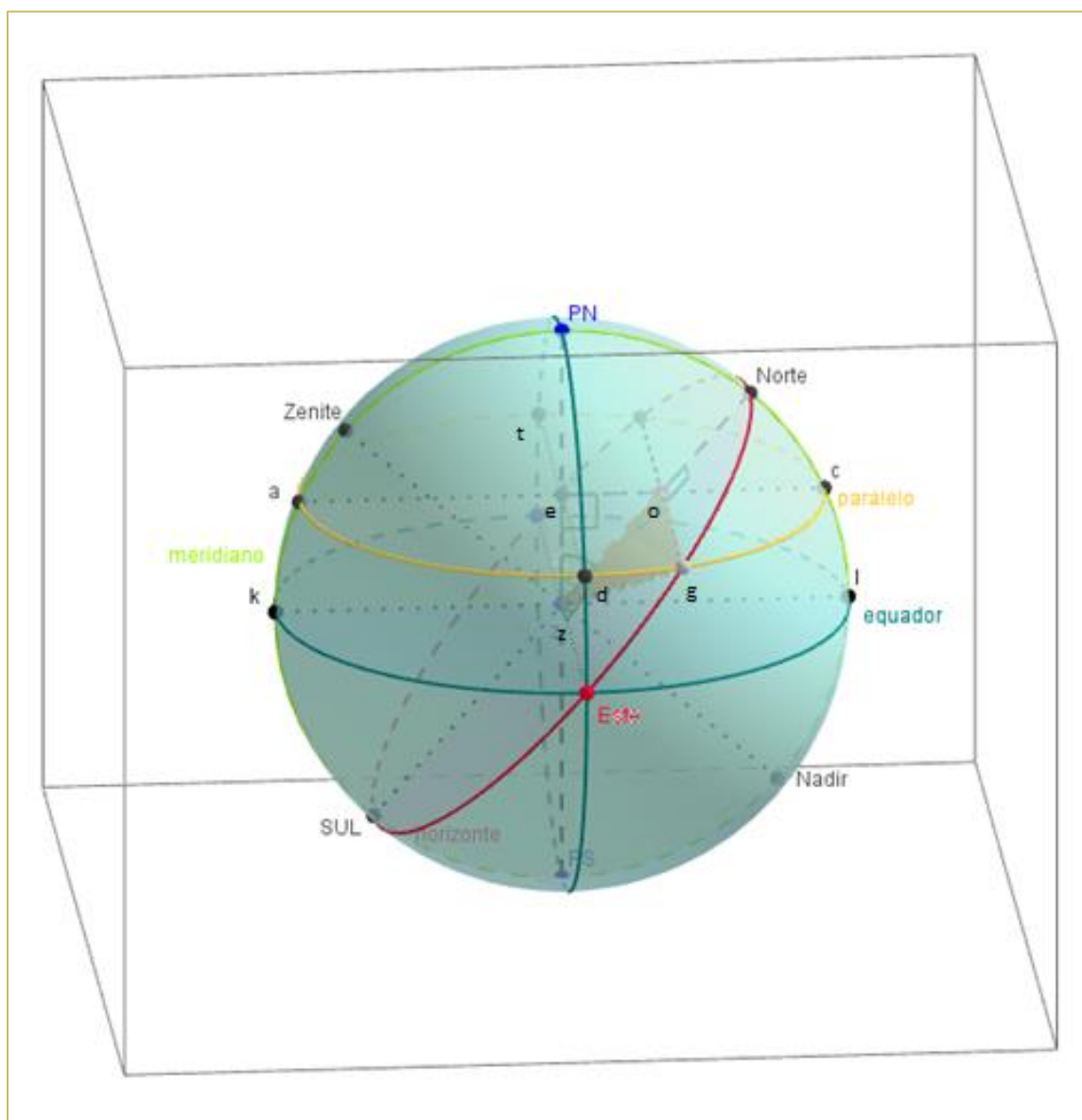


Ilustração 87 – Processo gráfico para determinar a duração do dia em qualquer momento do ano – esquema tridimensional

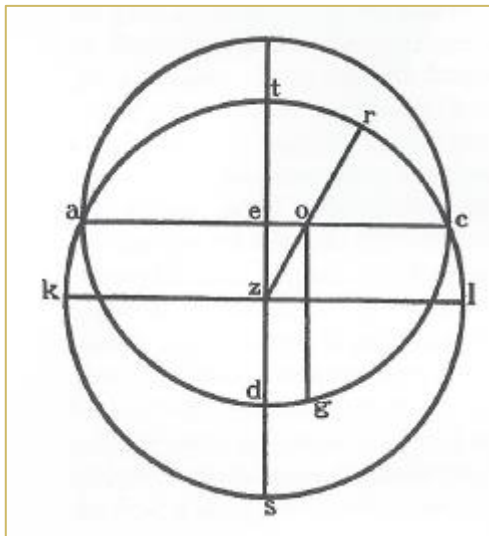


Ilustração 88 - Processo gráfico para determinar a duração do dia em qualquer momento do ano, Pedro Nunes

Na Ilustração 87 e na Ilustração 88:

- ✓ a linha  $fg$  é a intersecção entre o paralelo e o horizonte (na figura original o ponto  $f$  não aparece);
- ✓ o ponto  $o$  é o ponto médio do segmento  $fg$ ;
- ✓ a linha  $zo$  é a intersecção entre o meridiano e o horizonte;
- ✓ a linha  $go$  é o seno do arco do horizonte entre o ponto em que o Sol nasce ( $e$ ) e o ângulo da meia-noite ( $c$ );
- ✓ a linha  $zo$  é o seno da largura do nascimento do Sol ou rumo em que nasce.

Recorrendo à Lei dos Senos, que é aplicada ao triângulo  $eo$ , obtém-se:

$$\frac{oz}{ez} = \frac{\sin(eoz)}{\sin(eoz)}.$$

Assim é possível determinar uma de três quantidades:

- declinação do Sol ( $ez$  é seno da declinação)
- latitude do observador (ângulo  $eo$ )
- rumo de nascimento do Sol ( $oz$ )

a partir de outras duas, pois  $\sin(eoz) = \sin 90^\circ = 1$ .



#### 5.3.5.1.7) O ESTROMÊTO DA ANOTAÇÃO

Por fim Pedro Nunes apresenta um instrumento para usar no mar que permite determinar “quanto a agulha nordestea”<sup>24</sup>.

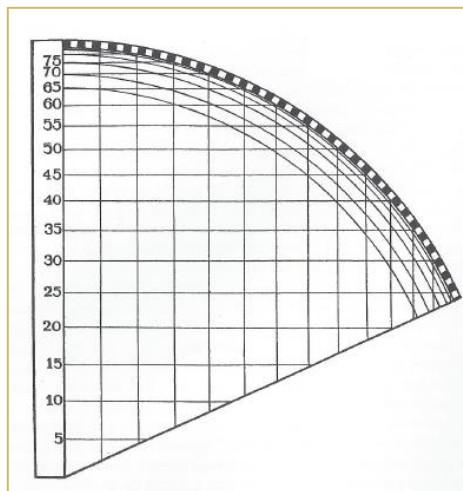


Ilustração 89 - O estromêto da Anotação, Pedro Nunes

Este instrumento permitia, graficamente, determinar o rumo de nascimento do Sol (ou seja a amplitude do Sol ao nascer e ao pôr), a partir da declinação solar e da latitude do observador.

O problema dos navegadores: “quanto a agulha nordestea” ou a variação da agulha

Uma preocupação constante do navegante é conhecer o desvio da agulha náutica, a fim de que na navegação, o navio possa, realmente, deslocar-se no rumo desejado e para que as marcações observadas possam ser devidamente corrigidas.

O que está por trás do desvio da agulha

A fonte é: Agulhas náuticas; conversão de rumos e marcações<sup>25</sup>.

#### *Rumos, Marcações e Agulhas Náuticas*

Os navios (ou embarcações) para se dirigirem de um ponto para outro da superfície da Terra orientam-se por *Rumos*, definidos como o ângulo horizontal entre uma direção de referência e a direção para a qual aponta a proa do navio (medido de 0° a 360°, no sentido horário, a partir da direção de referência).

Para além disso, na Navegação Costeira ou em Águas Restritas, para determinar a posição do navio (ou embarcação) em relação a pontos de terra, durante a execução da derrota, o navegante periodicamente observa *Marcações* de pontos notáveis ou auxílios à navegação.

<sup>24</sup> Pedro Nunes. Obras, vol. I.

<sup>25</sup> Fonte: <https://www.mar.mil.br/dhn/bhmn/download/cap3.pdf>; consultado em 12/09/2013

A bordo, ou Rumos e Marcações são obtidos através do uso de Agulhas Náuticas. Existem dois tipos de Agulhas Náuticas: Agulhas Magnéticas e Agulhas Giroscópicas.

A agulha magnética ou Bússola é um dos mais antigos instrumentos de navegação e, com poucos melhoramentos, é usada ainda hoje em dia por todos os navegantes qualquer que seja o tipo ou porte do navio ou embarcação.

Uma Agulha Magnética consiste numa Rosa Circular, graduada de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  (Ilustração 90), apoiada no seu centro, livre para girar em torno de um eixo vertical, flutuando numa cuba cheia de líquido. Um íman é fixado no lado inferior da Rosa, alinhado com o seu eixo norte-sul. A cuba é montada, através de suspensão. A cuba é feita em material não magnético e nela está gravada a linha de fé (referência para rumos), que deve ser rigorosamente alinhada com a linha proa-popa (eixo longitudinal do navio).



Ilustração 90 - Rosa Circular (esquerda) e Agulha magnética (direita)

O íman da agulha (e, portanto, a sua linha norte-sul) tende a alinhar-se com as Linhas de Força do Campo Magnético da Terra existentes no local. Estas Linhas de Força, denominadas Meridianos Magnéticos, indicam a direção do Norte Magnético no local. Portanto, o ângulo indicado na Rosa da Agulha entre a linha de fé (alinhada com o eixo longitudinal do navio) e a linha norte-sul da Agulha será igual ao ângulo entre a proa do navio e o Norte Magnético, ou seja, o Rumo Magnético do navio.

### *Magnetismo da Terra*

A Terra pode ser considerada um grande íman, tendo dois Polos Magnéticos de polaridades opostas (Polo Norte Magnético e Polo Sul Magnético). Os Polos Magnéticos não coincidem com os Polos Verdadeiros, ou Geográficos (Ilustração 91). O Polo Norte Magnético fica localizado aproximadamente na Lat.  $74^\circ N$ , Long.  $101^\circ W$ . O Polo Sul Magnético está na Antártica na Lat.  $60^\circ S$ , Long.  $144^\circ E$ .

Considerando o campo magnético terrestre num determinado local, decomposto segundo o horizonte e o vertical do lugar, obtêm-se as componentes horizontal ( $H$ ) e vertical ( $Z$ ) do magnetismo terrestre, variáveis de lugar para lugar e cujo valor vem indicado em cartas especiais.

A componente horizontal ( $H$ ) é zero nos polos magnéticos e alcança máximo valor no equador magnético.

A componente vertical ( $Z$ ) é zero no equador magnético e alcança máximo valor nos polos magnéticos.

A componente horizontal ( $H$ ) é a responsável pela orientação da Agulha Magnética.

Ao polo da agulha que aponta para o Polo Norte Magnético da Terra convencionou chamar-se Polo Norte da Agulha, denominando-se de Polo Sul da Agulha o polo oposto.

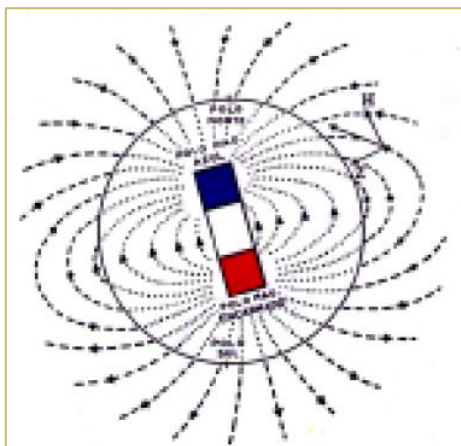


Ilustração 91 - Campo magnético terrestre

Uma Agulha Magnética tende a orientar-se segundo o Meridiano Magnético que passa pelo local (Ilustração 92). A diferença entre o Meridiano Magnético e o Meridiano Verdadeiro (ou Geográfico), num determinado lugar, é denominada *Declinação Magnética* (Dec mg). Da mesma forma, pode-se dizer que a Declinação Magnética num determinado local é o ângulo entre o Norte Verdadeiro e o Norte Magnético no local (Ilustração 92).

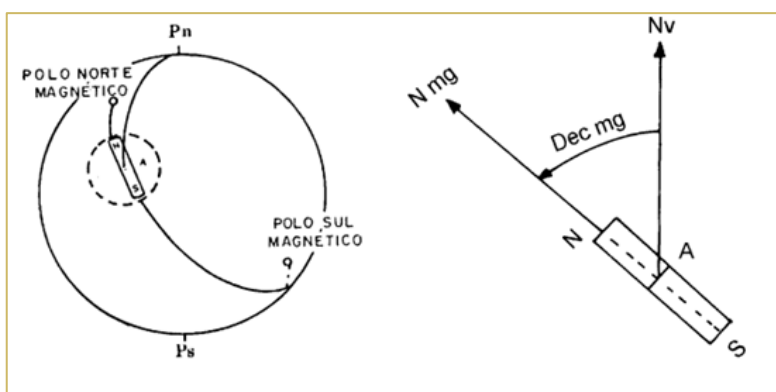


Ilustração 92 - Polo Norte magnético (esquerda) e Declinação Magnética (direita)

A Declinação Magnética é expressa em graus e minutos, recebendo uma designação Leste ou Oeste, para indicar de que lado do Meridiano Verdadeiro está o Meridiano Magnético (Ilustração 93).

A Declinação Magnética varia de local para local na superfície de Terra, em virtude das irregularidades das linhas de força do campo magnético terrestre. Para além disso, enquanto os Polos Verdadeiros (ou Geográficos) são fixos, os Polos Magnéticos da Terra variam de posição.

Desta forma, a Declinação Magnética de um local também varia ao longo do tempo.

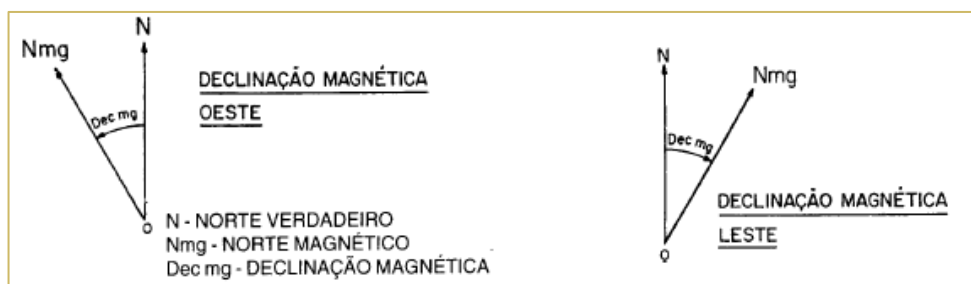


Ilustração 93 - Declinação Magnética Oeste e Leste

#### Desvio da agulha

Uma agulha magnética livremente suspensa, quando situada em terra, num local isento de outras influências magnéticas, permanece orientada na direção do meridiano magnético (linha de força do campo magnético terrestre). A bordo, porém, existem outros campos magnéticos, como por exemplo os provenientes dos ferros e aços de que o navio é construído.

Assim, o Desvio da Agulha é definido como o ângulo entre o Norte Magnético e o Norte da Agulha, conforme mostrado na Ilustração 94.

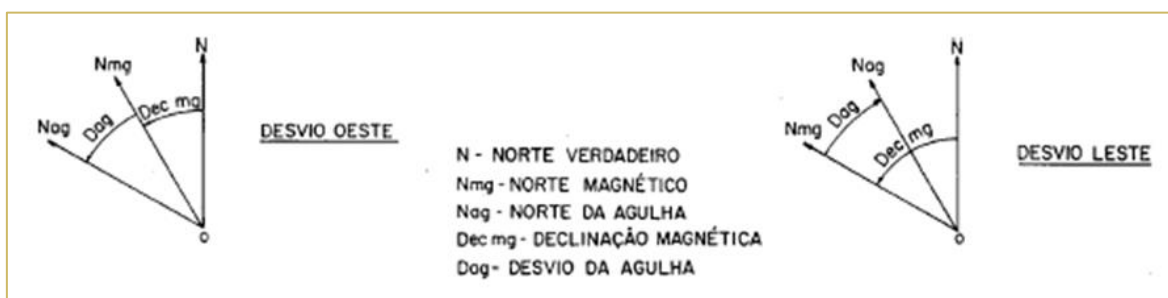


Ilustração 94 - Desvio este e oeste da agulha

Há vários métodos de determinação do desvio da agulha.

#### O azimute de um astro e sua relação com a amplitude do Sol

O azimute é o ângulo medido sobre o horizonte, no sentido horário, com origem no Norte geográfico e extremidade no círculo vertical do astro. O azimute varia entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ . A amplitude do Sol é o ângulo complementar ao azimute do Sol.

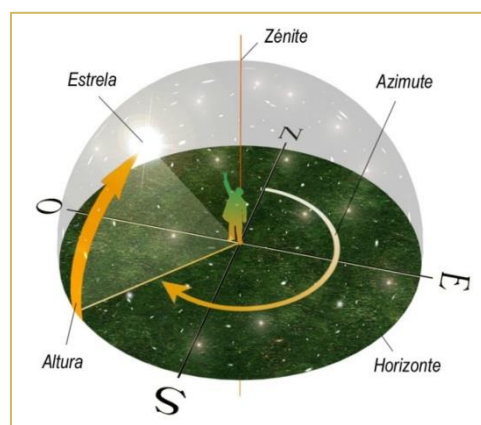


Ilustração 95 - Azimute<sup>26</sup>

<sup>26</sup> Fonte: <http://nautilus.fis.uc.pt/astro/hu/movi/images/imagem15.jpg>; consultado em 13/09/2013

## Determinação do desvio da agulha pelo azimute do Sol

A fonte é o Site Web Determinação do desvio da agulha pelos azimutes dos astros (2013).

Há várias circunstâncias favoráveis para observação de um astro e efetuar o cálculo do Azimute. Por exemplo, os instantes favoráveis para observação do Azimute para determinação do Desvio da Agulha são próximos do nascer ou do pôr dos astros. A observação mais precisa ocorre quando o astro está no horizonte verdadeiro do observador.

A rotina de observação do Azimute para determinação do Desvio da Agulha é a seguinte:

1. Observar o Azimute próximo ao nascer ou pôr do astro e anotar:

- Valor do *Azimute observado*;
- hora precisa da observação;
- posição estimada no instante da observação.

2. Com a hora da observação e a posição estimada, obter o valor do *Azimute verdadeiro calculado* do astro (para aquele instante e posição).

3. A diferença entre o *Azimute verdadeiro calculado* e o *Azimute observado* será o *Desvio da Agulha*.

## O estromêto da Annotação

Recordemos que o *estromêto* de Pedro Nunes permitia determinar graficamente a amplitude do Sol ao nascer a partir da declinação solar e da latitude do observador no dia da observação. Comparando esse valor com o da amplitude obtida por observação do Sol ao nascer, seria possível determinar o desvio da agulha.

A fonte é Pereira (2012).

Começemos por interpretar as várias linhas e marcações do *estromêto* a partir da Ilustração 96.



O procedimento é o seguinte:

- coloca-se o *estromêto* orientado de tal forma que: o lado esquerdo é elevado  $30^\circ$ , correspondente à latitude no momento de nascimento/pôr-do-sol ( $E-Hn$ );

- determina-se o ponto onde o Sol nasce/põe: é o ponto de interseção entre o paralelo de  $20^\circ$  e  $E-Hn$ ;

Como a declinação do Sol que estamos a considerar é  $20^\circ N$ , na figura bidimensional da Ilustração 96 sobre o paralelo  $20^\circ N$  desenhamos um segmento paralelo a  $Q-Q'$  que corresponde ao movimento diurno do Sol. Tal permite-nos obter: a passagem meridiana inferior (*p. m. i.*), a passagem meridiana superior (*p. m. s.*). Na figura tridimensional da Ilustração 96, a amplitude do Sol é o ângulo entre  $E$  e o ponto do horizonte onde se dá o nascimento do Sol.

- é fixado um fio no centro do instrumento, ao longo da qual desliza uma margarita: esta margarita é deslizada do ponto determinado anteriormente, onde o Sol se nasce/põe, até se obter a distância sobre a escala desenhada do lado esquerdo do setor e que é o *arc sen* da amplitude do Sol.

Se o raio do círculo é a unidade, a distância entre o centro  $a$  e qualquer graduação corresponde ao seno do ângulo lá representado – tal vê-se de forma mais fácil se a graduação do setor começar em  $Q'$ .

Assim, as distâncias entre o centro  $a$  e qualquer graduação correspondem ao seno do ângulo lá representado o que é o mesmo que dizer que a distância  $E-nasc.$  é a linha trigonométrica correspondente ao seno da amplitude do Sol. É este o papel da margarita: fazer o rebatimento do seno do arco. O valor que se lê sobre a escala desenhada do lado esquerdo do setor (que é a linha dos Polos) é *arc sen* da amplitude do arco que lhe corresponde.

No caso da Ilustração 96, o rebatimento mostra-nos um ângulo de cerca de  $23^\circ$ . Numa tabela do século *XVII*, António Naiera indica que, para uma latitude de  $30^\circ$  e declinação de  $20^\circ$ , obtemos um ângulo de rebatimento de  $23^\circ 16'$ . Segundo Pereira (2012), se o instrumento tiver uma dimensão razoável, poder-se-iam obter valores até às frações do grau.

A *Annotação* termina com Pedro Nunes a generalizar o resultado geométrico dizendo que permitia resolver problemas de trigonometria esférica.

### 5.3.5.2) De Crepusculis

Nesta obra Pedro Nunes volta a usar o seno recto.

Pedro Nunes fala, frequentemente, nos complementos dos arcos.

Nesta obra o cosseno já aparece e como “seno do complemento”. O cosseno aparece, também, envolto no “seno verso”.

Pode aqui colocar-se a questão porque é que Pedro Nunes não usa o seno verso no Tratado da Sphera. São avançadas duas hipóteses por Manuel A. Peres Júnior nas suas Notas a Pedro Nunes. Obras, vol. II: pode representar um progresso nos conhecimentos do autor ou por mera coincidência não lhe foi

necessário o uso do seno verso nas demonstrações do seu primeiro trabalho, sendo esta última hipótese a mais aceitável.

Dizemos que o cosseno aparece envolto no seno verso porque Pedro Nunes, que frequentemente se refere à tábua do seno recto, nunca diz de onde tirou e de onde se deveriam tirar os valores do seno verso. Manuel A. Peres Júnior nas Notas a Pedro Nunes.Obras, vol II, conclui que Pedro Nunes não tinha a tábua para o seno verso e tinha de recorrer à tábua do seno recto fazendo a diferença entre o semidiâmetro e o “seno do complemento”.

É no Apêndice V que começa o que podemos chamar a “trigonometria do De Crepusculis”. De notar que Pedro Nunes não faz rigorosamente o que se pode chamar trigonometria, isto é, não relaciona os seis elementos de um triângulo; apenas procura relações entre arcos, relações que não podem ser diretas e em que os arcos, portanto, aparecem representados por outras entidades – os seus senos rectos e versos.

*E a tangente?*

Quanto às tangentes não há o mais leve indício de que Pedro Nunes as conhecesse. Contudo tal custa admitir considerando que Pedro Nunes estava a par das obras de Albaténio e de Regiomontano.





## Capítulo 6 - Mais alguns episódios da História da Trigonometria

Neste capítulo escolheram-se alguns matemáticos e/ou momentos significativos na história da Trigonometria, após Pedro Nunes, que contribuíram fortemente para a Trigonometria tal como a conhecemos hoje.

### 6.1. Rheticos (1514-1574)

A fonte é Katz (2010).

George Joachim Rheticus definiu as funções trigonométricas no seu trabalho diretamente a partir dos ângulos de um triângulo retângulo, fixando o comprimento de um dos lados num valor numérico alto. Rheticus chamou ao seno “perpendicularum” e ao cosseno a “base” de um triângulo com hipotenusa fixa.

### 6.2. Pitiscus (1561-1613) e a invenção da palavra trigonometria – ano 1600

A fonte é Katz (2010).

Só em **1600**, com o trabalho de Bartolomeu Pitiscus, apareceu explicitamente a resolução de um triângulo plano na terra. De fato, Pitiscus inventou o termo “trigonometria”. Chamou ao seu livro *Trigonometriae sive, de dimensione triangulis, Liber* (Livro da Trigonometria, ou a Medição de Triângulos).



Ilustração 97 - Capa da obra *Trigonometriae sive* de Pitiscus<sup>27</sup>

<sup>27</sup> As ilustrações 97 a 101 (esquerda) foram retiradas de:

Fonte: <[http://books.google.pt/books?id=LyMFxgMZv4C&printsec=frontcover&hl=pt-PT&source=gbs\\_ge\\_summary\\_r&cad=0#v=onepage&q&f=false](http://books.google.pt/books?id=LyMFxgMZv4C&printsec=frontcover&hl=pt-PT&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false)> 15/06/2013

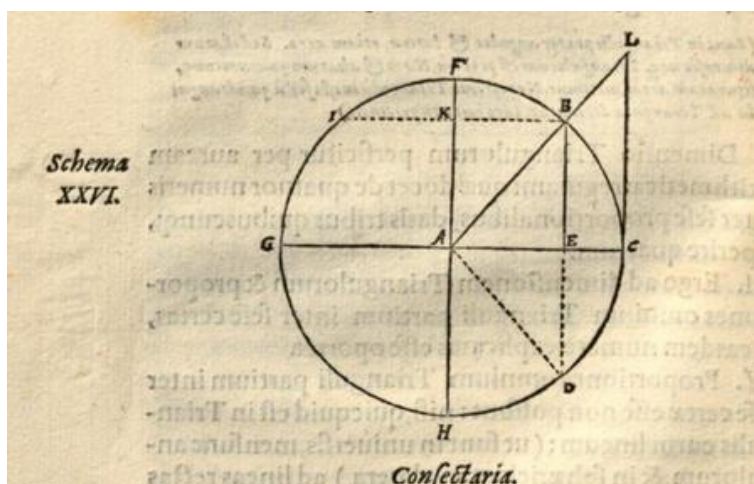


Ilustração 98 – Esquema original usado por Pitiscus para se referir ao seno, cosseno, tangente e secante. Neste esquema LC é a tangente ao arco BC.

**I.** Sinus ergo rectus arcus quadrante minoris & maioris usque ad semicirculum est idem. *Vt, sinus rectus arcus BC. & BG. est eadem recta BE quippe semis recta BED. que tam arcum BGD quam arcum BCD. subtendit.*

**2.** Ac proinde sinus rectus complementi quodcumque dicitur: intelligitur tantum sinus rectus complementi arcus quadrante minoris. *Vt, sinus rectus complementi BC nempe arcus BF est recta BK.*

**3.** Sinus rectus omnis est in diametrum ex altero arcus termino ductam perpendicularis. *Quia enim in Triangulo ABD. laterum equalium AB & AD. semidiameter AC, a concursu laterum equalium ducta, bisecat basin BD. ad E. per definitionem sinus recti: ideo est in eam perpendicularis: & hac vicissim in illam, per 23. p. 1.*

**4.** Sinus rectus complementi est æqualis segmento diametri siue radij inter sinum rectum arcus & centrū intercepti. *Vt, sinus rectus complementi BF. nempe recta BK. est æqualis recta EA. per c. 39. p. 1.*

**VIII.** Sinus uersus est segmentum diametri inter sinum rectum & circumferentiam interceptum. *Vt, sinus uersus arcus BC est segmentum diametri EC. Sinus uersus arcus BG est segmentum diametri GE.*

*Ergo sinus uersus alius est maior, alius minor.*

*Sinus uersus maior, est sinus uersus arcus quadrante maioris: ut GE.*

*Sinus uersus minor est sinus uersus arcus quadrante minoris: ut EC.*

**IX.** Tangens est recta a secante per alterum arcus terminum ducta in extremitatem diametri ad alterum arcus terminum perpendicularis. *Vt arcus BC tangens est recta LC.*

F ij X. Secans

Ilustração 99 - Extratos das definições trigonométricas de Pitiscus

1. O seno reto do quadrante menor e maior é o mesmo. O seno reto do arco  $BC$  e do arco  $BG$  é  $BE$ , que é metade do segmento  $BED$  que subentende o arco  $BGD$  e o arco  $BCD$ .

2. O seno reto do complementar é entendido para o quadrante menor.

O seno reto do complementar (isto é, o cosseno) do arco  $BC$  (que é  $BF$ ) é  $BK$ .

4. O seno reto do complementar (isto é o cosseno) é igual ao segmento do diâmetro ou do raio entre o ângulo reto e o centro. O seno reto do arco complementar  $BF$  é  $BK$ , que é igual a  $EA$ .

VIII. O seno verso é o segmento do diâmetro entre o ângulo reto e a interseção com a circunferência. O seno verso do arco  $BC$  é o segmento do diâmetro  $EC$ . O seno verso do arco  $BG$  é o segmento do diâmetro  $GE$ . O seno verso maior é o seno verso do arco do quadrante maior:  $GE$ . O seno verso menor é o seno verso do arco do quadrante menor:  $EC$ .

IX. A tangente é o segmento definido entre a reta secante a uma das extremidades do arco e a perpendicular ao diâmetro da outra extremidade do arco. A tangente do arco  $BC$  é a reta  $LC$ . (tradução livre)

X. Secans est recta per alterum arcus terminum usq; ad summitatem tangentis ducta. *Ut arcus BC secans est recta AL.*

Ilustração 100 - Extratos das definições trigonométricas de Pitiscus (continuação)

X. A perpendicular  $LC$  que é tangente ao arco  $BC$  intersesta a reta secante em  $L$ . A secante do arco  $BC$  é  $AL$ . (tradução livre)

No texto, Pitiscus pretendia mostrar como medir o triângulo. No apêndice 2, em Altimetria, Pitiscus apresenta métodos trigonométricos para determinar a altura,  $BC$ , de uma torre distante. Na Ilustração 101, é usado um quadrante para medir o ângulo  $AKM$ :  $60^{\circ}20'$ . Este ângulo tem a mesma amplitude do ângulo  $ABC$ . A distância  $AC$  do observador à Torre é de 200 pés.

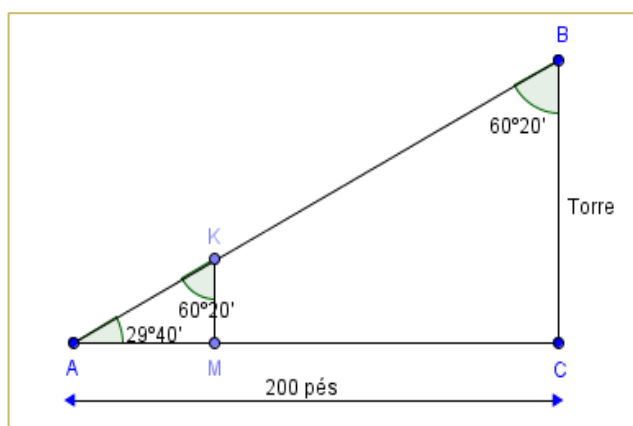
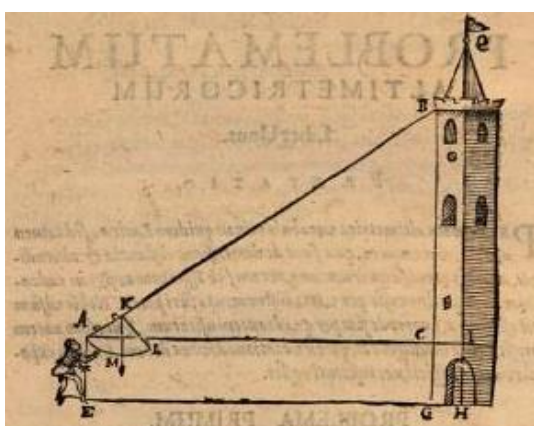


Ilustração 101 – Esquema para a determinação da altura da Torre,  $BC$

Pitiscus estabelece a proporção:

$$\frac{\sin 60^{\circ}20'}{AC} = \frac{\sin 29^{\circ}40'}{BC},$$

que é a Lei dos senos. Daqui segue:

$$BC = \frac{AC \times \sin 29^{\circ}40'}{\sin 60^{\circ}20'} \approx 114 \text{ pés.}$$

Para este cálculo, Pitiscus usa a tabela dos senos obtida para um raio de 100 000.

Pitiscus apresenta um segundo procedimento para determinar a altura da Torre, recorrendo à sua tabela de tangentes no qual a proporção utilizada é:

$$\frac{AC}{100\,000} = \frac{BC}{\tan 29^{\circ}40'}.$$

Daqui segue:

$$BC = \frac{AC \times \tan 29^{\circ}40'}{100\,000}.$$

O que Pitiscus faz é comparar o triângulo  $ABC$  com um triângulo semelhante que tem uma base que mede 100 000 e, portanto, a altura é a tangente de  $29^{\circ}40'$ , por definição. De notar que o valor 100 000 é considerado como a unidade e o que Pitiscus faz é:

$$BC = \frac{AC \times \tan 29^{\circ}40'}{100\,000} = AC \times \tan 29^{\circ}40' \approx 114 \text{ pés.}$$

A diferença entre os métodos de Pitiscus e os atualmente utilizados é que ele tem sempre de fazer ajustamentos, dado que os seus valores trigonométricos são comprimentos de certas linhas num círculo particular.

As razões trigonométricas tal como as conhecemos ainda demorariam a chegar.

### 6.3. Triângulos de ângulos retos e John Napier (1550-1617)

A fonte é Van Brummelen, *Heavenly Mathematics* (2009).

#### 6.3.1. John Napier

Algumas das fórmulas deste tópico têm origem medieval, provindo de astrónomos antigos. Contudo muito do que iremos ver foi sistematizado na Escócia, por um homem que não era sequer um matemático. O que o tornou famoso não está sequer relacionado com trigonometria.

Os amigos e associados de John Napier ficariam surpreendidos com a sua reputação como figura científica que é hoje em dia. Para Napier e seus colegas a ciência era um hobby.

O interesse de Napier pela esfera ocorreu numa altura oportuna. Não faltaria muito para a trigonometria esférica se tornar indispensável para descobrir os caminhos no mar alto. No seu trabalho trigonométrico, Napier refere-se, essencialmente, a triângulos esféricos de ângulo reto. Trabalhar desta forma não é uma limitação dado que é assim que se trabalha em trigonometria plana hoje em dia. Após os teoremas para triângulo retângulos estarem estabelecidos, podem-se considerar triângulos oblíquos: basta, para isso, desenhar uma perpendicular de um vértice apropriado, dividindo o triângulo oblíquo em dois triângulos retângulos. Napier sabia disto.

### 6.3.2. Ângulo esférico

Se um plano passa pelo centro de uma esfera divide-a em dois hemisférios idênticos ao longo de um grande círculo, ou círculo máximo. Qualquer plano que corta a esfera sem passar pelo seu centro intersecta-a num círculo menor.

Quando dois círculos máximos se intercetam num ponto, formam entre si um ângulo esférico. A medida de um ângulo esférico é igual à medida do ângulo plano entre as tangentes dos dois arcos que o formam.

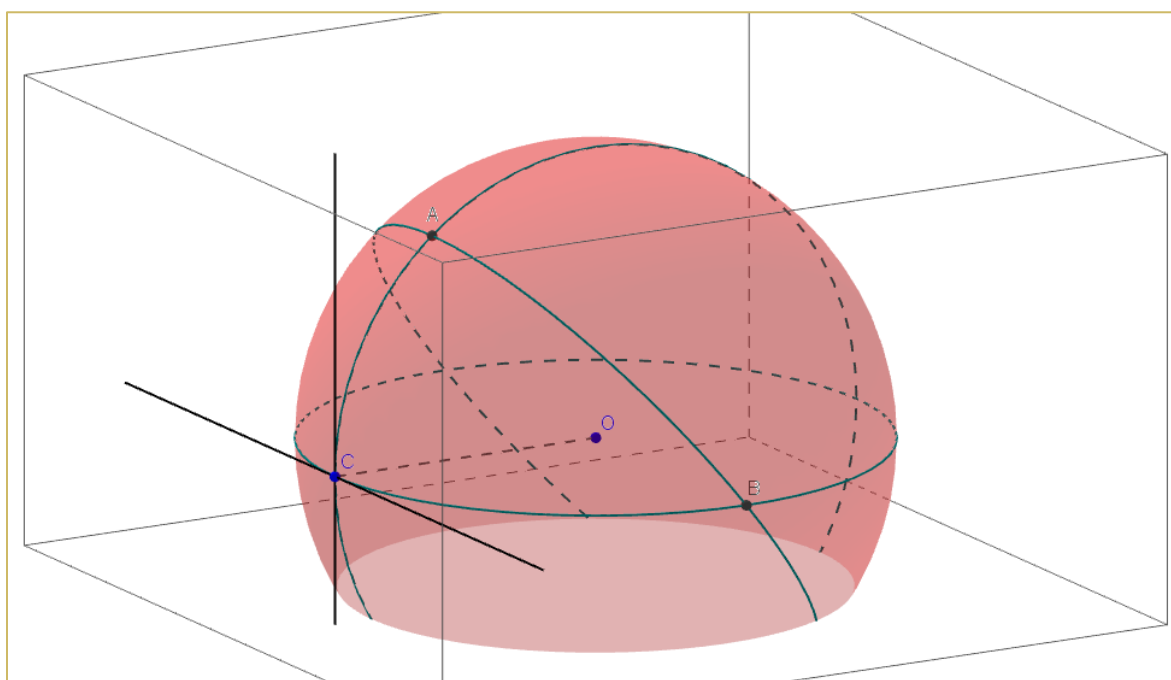


Ilustração 102 - Triângulo esférico e ângulo esférico

### 6.3.3. Triângulos esféricos de ângulo reto e triângulos planos retângulos

Neste ponto deve tomar-se como referência a Ilustração 103.

Nos triângulos esféricos de ângulo reto, vai-se usar a convenção habitual que consiste em considerar o ponto  $C$  como vértice (onde está o ângulo reto), letras minúsculas para os lados do triângulo, sendo  $c$  a hipotenusa. Podemos converter os comprimentos  $a$ ,  $b$  e  $c$  em ângulos de forma fácil: se unirmos os três vértices ao centro  $O$  da esfera, os ângulos formados em  $O$  vão ser iguais aos ângulos formados pelos lados do triângulo. Para obter os teoremas iremos converter os ângulos esféricos  $A$  e  $B$  em ângulos planos, conversão o que não é óbvia. Uma maneira, é pensar no ângulo esférico  $A$  como estando entre o plano do chão  $OAC$  e a face diagonal  $OAB$ ; analogamente, o ângulo esférico  $B$  é o ângulo entre a parede vertical  $OBC$  e a face diagonal  $OAB$ .



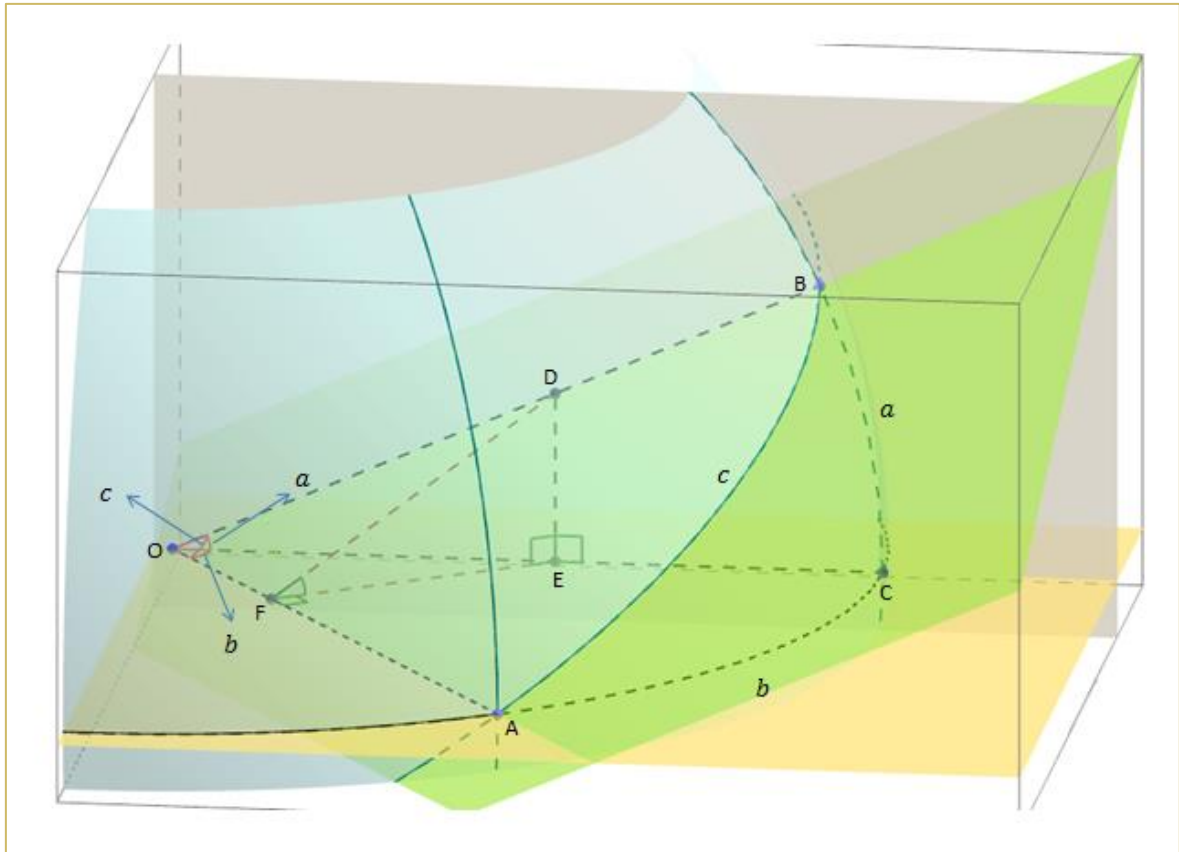


Ilustração 103 – Passagem de ângulos esféricos a ângulos planos

Precisamos de exprimir os ângulos esféricos  $A$  e  $B$  como ângulos entre segmentos de reta em vez de ângulos entre planos. Para fazer esta transição, escolhemos um ponto qualquer  $D$  em  $OB$ . Baixamos uma perpendicular a  $OC$  passando por  $D$ . Seja  $E$  o ponto de interseção desta perpendicular com  $OC$ . De seguida, desenha-se a perpendicular a  $AO$  passando por  $E$ . Seja  $F$  o ponto de interseção dessa perpendicular com  $AO$ . Obtém-se o triângulo retângulo  $DEF$  dentro da esfera. Os triângulos  $ODE$ ,  $DEF$  e  $OEF$  são retângulos.

O triângulo  $ODF$  parece retângulo. Vamos mostrar que é!

Recorremos ao recíproco do Teorema de Pitágoras: consideramos o quadrado de  $OD$ , que esperamos ser a hipotenusa e vem:

$$OD^2 = OE^2 + ED^2 = (OF^2 + EF^2) + (DF^2 - EF^2) = OF^2 + DF^2.$$

Conclui-se que o triângulo  $ODF$  é retângulo, bem como as outras três faces do tetraedro  $ODEF$ . Assim  $DF$  é perpendicular a  $AO$ . Então como  $FD$  e  $FE$  são ambos perpendiculares a  $AO$ , o ângulo  $DFE$  é igual ao ângulo entre os planos  $OAC$  e  $OAB$  que é igual ao ângulo esférico  $A$ .

### 6.3.4. As dez fórmulas de um triângulo esférico de ângulo reto

A aplicação da trigonometria à Ilustração anterior produz resultados mágicos. A partir deste diagrama, podemos obter sete fórmulas, relacionando os elementos do triângulo esférico de ângulo reto. A chave está em considerar os quatro cantos do tetraedro  $ODEF$ . Cada vértice partilha o terminus de três segmentos de reta. Escolhe-se um vértice qualquer e identifica-se a razão que consiste em dois dos três segmentos de reta.

Por exemplo, considerando o vértice  $D$ :

$$\sin a = \frac{DE}{OD} = \frac{DE}{DF} \cdot \frac{DF}{OD} = \sin A \cdot \sin c .$$

Escolhendo os outros vértices de  $ODEF$  vem:

$$\text{para o vértice } E, \sin b = \frac{FE}{OE} = \frac{FE}{DE} \cdot \frac{DE}{OE} = \tan a \cot A ;$$

$$\text{para o vértice } F, \cos A = \frac{FE}{FD} = \frac{FE}{OF} \cdot \frac{OF}{FD} = \tan b \cdot \cot c ;$$

$$\text{para o vértice } O, \cos c = \frac{OF}{OD} = \frac{OE}{OD} \cdot \frac{OF}{OE} = \cos a \cdot \cos b .$$

Note-se que a última identidade era conhecida desde o século  $X$  pelos cientistas árabes al-Nayrīzī e al-Khāzin.

As quatro identidades anteriores eram conhecidas, também, pelos indianos.

Como  $A$  e  $B$  são dois vértices arbitrários, não há distinção matemática entre eles e o mesmo se passa para  $a$  e  $b$ . Já  $C$  não é arbitrário pois é onde se localiza o ângulo reto. Assim sendo, podemos trocar  $A$  e  $B$  e  $a$  e  $b$  e surgem novas fórmulas:

$$\sin b = \sin B \cdot \sin c ;$$

$$\cos B = \tan a \cdot \cot c ;$$

$$\sin a = \tan b \cdot \cot B .$$

Da forma como foi construído o diagrama, ainda não foram geradas identidades que se refiram, simultaneamente, a  $A$  e a  $B$ . Vamos chegar a elas com geometria.



Temos de adicionar o ângulo  $B$  ao diagrama e por isso adaptamos o processo usado para construir  $A$ ! Construimos um ponto  $G$  em  $AO$  e traçamos a perpendicular a  $OC$  que passa por  $G$ . Seja  $E$  o ponto de interseção dessa perpendicular com  $OC$ . Depois, desenhamos a perpendicular a  $OB$  que passa por  $E$ . Seja  $H$  o ponto de interseção dessa perpendicular com  $OB$ . De seguida, une-se  $G$  a  $H$ . Tal como anteriormente, o triângulo  $OHG$  é retângulo e  $\hat{B} = \hat{EHG}$ .

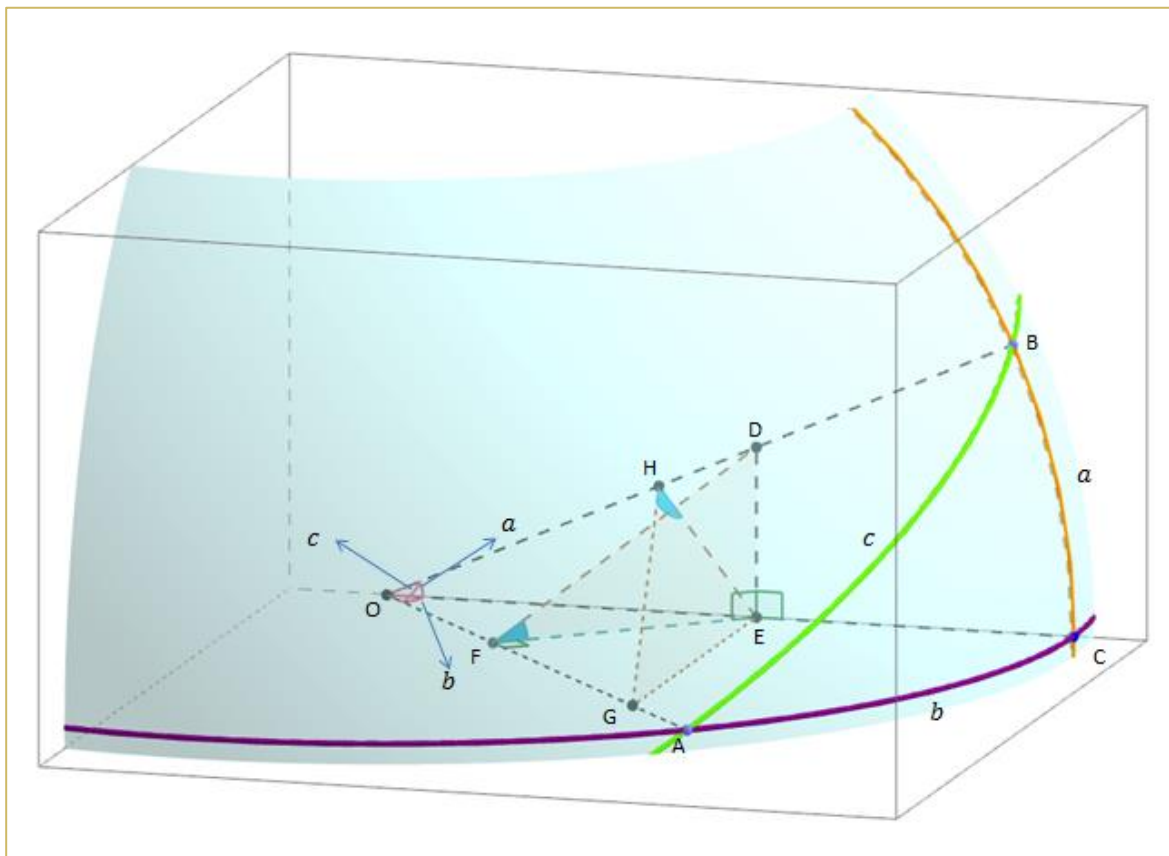


Ilustração 104 - As dez fórmulas de um triângulo esférico de ângulo reto, esquema tridimensional

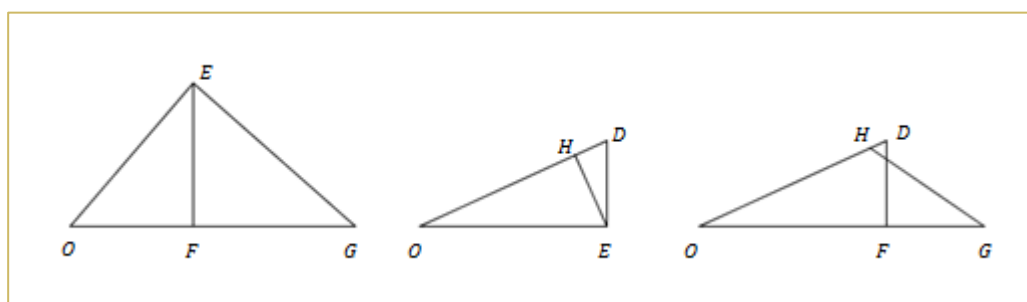


Ilustração 105 - As dez fórmulas de um triângulo esférico de ângulo reto, esquema bidimensional

Cada um dos três planos contendo  $O$ , contém também vários triângulos semelhantes, desenhados separadamente na Ilustração 105. Estes triângulos irão despoletar novas identidades. A ideia é começar com algumas razões trigonométricas, como  $\cos c = \frac{OF}{OD}$  e usar os triângulos semelhantes da Ilustração 105 para converter as novas razões em funções trigonométricas de outros ângulos conhecidos:

$$\cos c = \frac{OF}{OD} = \frac{OE}{OD} \cdot \frac{OF}{OE} = \frac{HE}{DE} \cdot \frac{EF}{EG} = \frac{EF}{DE} \cdot \frac{HE}{EG} = \cot A \cdot \cot B.$$

Do mesmo diagrama podemos obter mais duas identidades, trocando  $A$  e  $a$  com  $B$  e  $b$ :

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{EF}{FD} = \frac{EF}{OG} \cdot \frac{OG}{FD} = \frac{EF}{OG} \cdot \frac{OD}{HG} = \frac{OD}{OG} \cdot \frac{EF}{HG} = \frac{OH}{OF} \cdot \frac{EF}{HG} = \\ &= \frac{EF}{OF} \cdot \frac{OH}{HG} = \frac{EG}{OE} \cdot \frac{OH}{HG} = \frac{OH}{OE} \cdot \frac{EG}{HG} = \frac{OE}{OD} \cdot \frac{EG}{HG} \\ &= \cos a \cdot \sin B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{HE}{HG} = \frac{HE}{OE} \cdot \frac{OE}{HG} = \frac{DE}{OD} \cdot \frac{OE}{HG} = \frac{HD}{DE} \cdot \frac{OE}{HG} = \frac{HD}{HG} \cdot \frac{OE}{DE} = \frac{HD}{HG} \cdot \frac{OH}{HE} = \\ &= \frac{HD}{HE} \cdot \frac{OH}{HG} = \frac{HD}{HE} \cdot \frac{OF}{DF} = \frac{DE}{OE} \cdot \frac{OF}{DF} = \frac{OF}{OE} \cdot \frac{DE}{DF} \\ &= \cos b \cdot \sin A. \end{aligned}$$

Estes resultados são conhecidos como *Teorema de Geber*. Datam do início do século *XII* e devem-se a Jabir ibn Aflah, também conhecido por Geber.

Para a biografia de Geber, as fontes consultadas são Sites Web al-Ishbili Abu Muhammad Jabir ibn Aflah (1999) e Jābir ibn Aflāḥ: Abū Muḥammad Jābir ibn Aflāḥ (2007).

Jabir ibn Aflah foi um matemático e astrónomo da Andaluzia do século *XII* que escreveu um tratado chamado *Islāh al-Majisti* (Correção do Almagesto), no qual, tal como o nome sugere, o autor faz uma longa série de críticas e correções ao Almagesto de Ptolomeu. Por exemplo, o Teorema de Menelau usado por Ptolomeu sistematicamente foi substituído por outros teoremas relacionados com geometria esférica. Provavelmente, estes teoremas foram retirados de matemáticos como Abū'l-Wafā ou Abu Nasr Mansur, que foram responsáveis pela chamada “revolução trigonométrica” no mundo islâmico. Na Andaluzia, estes teoremas foram formulados, pela primeira vez, por Ibn Mu’adh no início do século *XI*. Mas Jabir não faz qualquer referência a qualquer dos autores árabes referidos, nem a Ibn Mu’adh, apesar de ser andaluz.

O tratado de Jabir ajudou a espalhar a trigonometria pela Europa. No século *XIII* os teoremas trigonométricos foram usados por astrónomos que compilaram o Libro del Quadrante Sennero (livro

do quadrante do seno) escrito sob o patrocínio de Afonso X, o sábio. No século XIV, Richard de Wallingford usou os teoremas no seu trabalho. Jabir poderá ser ainda uma fonte do trabalho de John Muller (Regiomontanus), *De triangulis*, apesar de não ser mencionado. Finalmente, poderá ser uma fonte de Nicolau Copérnico, na secção trigonométrica da sua obra *De Revolutionibus*.

### 6.3.5. Passando aos triângulos planos

Temos agora dez identidades fundamentais do triângulo esférico de ângulo reto.

Quando os triângulos esféricos se tornam cada vez mais pequenos, ou seja quando  $a, b$  e  $c$  se aproximam de zero, a sua curvatura diminui e ficam quase planares. Assim, se fizermos uma afirmação sobre triângulos esféricos e fazendo tender  $a, b, c$  para 0, chegamos a afirmações sobre triângulos planos. Vejamos os seguintes exemplos:

| <i>Fórmula esférica</i>  | <i>Fórmula equivalente planar</i> |
|--|-----------------------------------|
| $\sin a = \sin A \sin c \Leftrightarrow \sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$  | $\sin A = \frac{a}{c}$            |
| $\cos A = \tan b \cdot \cot c \Leftrightarrow \cos A = \tan b \cdot \frac{1}{\tan c} = \frac{\tan b}{\tan c}$                | $\cos A = \frac{b}{c}$            |
| $\sin b = \tan a \cdot \cot A \Leftrightarrow \cot A = \frac{\sin b}{\tan a} \Leftrightarrow \tan A = \frac{\tan a}{\sin b}$ | $\tan A = \frac{a}{b}$            |

Todas estas inferências são válidas porque para triângulos pequenos as razões entre os senos e tangentes aproximam-se das razões entre os próprios ângulos.

Obtemos equivalências análogas para a maior parte das outras identidades. Por exemplo, para  $\cos A = \sin B \cos a$  obtemos como equivalente planar  $\cos A = \sin B$ . Como para um triângulo planar  $B = 90^\circ - A$ , a afirmação está correta.

## 6.4. Os termos seno e cosseno e as suas abreviaturas

A fonte é Maor (1998).

Encontramos a palavra *sinus* nos escritos de Gerard de Cremona (1114-1187) que traduziu muitos dos livros gregos antigos, incluindo o Almagesto, do árabe para o latim. Outros escritores seguiram-no e rapidamente a palavra *sinus* ou *sine* (na sua versão inglesa) tornaram-se comuns nos textos matemáticos pela Europa.

A primeira vez que encontramos a notação abreviada *sin* é com Eduard Gunter (1581-1626), um ministro inglês que mais tarde se tornaria professor de Astronomia no Gresham College de Londres. Em 1625 Gunter inventou um mecanismo mecânico, A “Escala de Gunter” para cálculos com logaritmos e a notação *sin* e *tan* aparecem nos desenhos da sua invenção.

Contudo, é de notar que, muitos autores europeus usaram a sua própria notação relativamente ao termo seno e à sua abreviatura.

Segundo Estrada et al (2000), a palavra seno terá, provavelmente, aparecido pela primeira vez em língua portuguesa na obra de Pedro Nunes.

A função cosseno que hoje em dia consideramos em igualdade de circunstâncias com a função seno foi, como já vimos, vista durante muito tempo como seno do ângulo complementar. O nome *cosinus* vem de Eduard Gunter: ele escreveu *co.sinus* que foi modificado em 1658 para *cosinus* por John Newton (1622-1678), um professor e autor de livros de matemática. A notação abreviada *Cos* foi usada pela primeira vez em 1674 por Sir Jonas Moore (1617-1679), um matemático e investigador inglês.

## 6.5. Os termos secante e cossecante e as suas abreviaturas

A fonte é Maor (1998).

As funções secante e cossecante apareceram mais tarde e como já vimos, foram mencionadas pela primeira vez por Abū'l-Wafā mas sem estes nomes especiais. Abū'l-Wafā foi o primeiro a construir uma tabela de tangentes.

E estas funções eram de pouco interesse até que as tabelas de navegação foram calculadas no século XV.

A primeira tabela de secantes impressa apareceu no trabalho de Rheticus, *Canon doctrinae triangulorum* de 1551. Neste seu trabalho aparecem as seis funções trigonométricas.

A notação *sec* foi sugerida em 1626 pelo francês Albert Girard (1595-1632), que viveu a maior parte da sua vida na Holanda. Para *secA* ele escreveu  $\overset{sec}{A}$ , uma notação semelhante para *tanA*, mas para *sinA* e *cosa* ele escreveu *A* e *a*.

## 6.7. Os termos tangente e cotangente e as suas abreviaturas

A fonte é Maor (1998).

As razões para a tangente e cotangente, como vimos, parecem associadas ao gnómon e à medição de sombras.

O tratamento destas razões como funções de um ângulo surge com os árabes. A primeira tabela de tangentes e cotangentes foi construída por volta do ano 86 por Habash al-Hasib. Al-Battānī construiu o equivalente a uma tabela de cotangentes para cada grau de  $1^\circ$  a  $90^\circ$ . Relembremos que foi através do trabalho deste matemático que a tabela indiana da função da corda metade foi conhecida na Europa.

O nome moderno *tangent* apareceu em 1583 quando Thomas Fincke (1561-1646), um matemático dinamarquês, o usou no seu trabalho *Geometria Rotundi*. Até aí a maioria dos escritores europeus usavam os termos ligados à medição de sombras, como *umbra recta* ou *umbra versa* (que já vimos anteriormente).

A palavra *cotangens* foi usada pela primeira vez por Eduard Gunter em 1620.

Várias abreviaturas foram usadas como *t* e *tco* por William Oughtred (1657) e *T* e *t* por John Wallis (1693).

O primeiro a usar as abreviaturas de forma consistente foi Richard Norwood (1590-1665), um matemático e investigador inglês. Num trabalho sobre trigonometria publicado em Londres em 1631 ele escreveu: “Nestes exemplos *s* é usado para sine: *t* para tangent: *sc* para sine complemente [ou seja cosseno]: *tc* para tangente complement: *sec* para secant.”<sup>28</sup>

Note-se que ainda hoje em dia não há conformidade na notação e nos textos encontramos *tg* e *ctg*.

A palavra *tangente* vem do latim *tangere*, tocar; a sua associação com a função tangente deve resultar da seguinte observação e da Ilustração 106: num círculo de centro *O* e raio *r*, seja *AB* a corda subentendida pelo ângulo ao centro  $2\alpha$  e *OQ* o bissetor deste ângulo; desenha-se a linha paralela a *AB* e simultaneamente tangente ao círculo em *Q*; prolonga-se *AO* e *OB*; a interseção das semirretas *AO* e *OB* com a reta tangente ao círculo em *Q* é *C* e *D*, respetivamente.

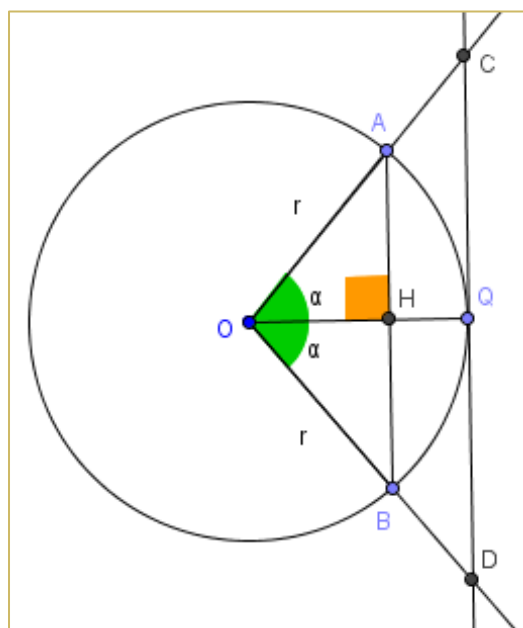


Ilustração 106 - Função tangente e reta tangente

<sup>28</sup> Maor (1998).

Tem-se:

$$AB = 2r \sin \alpha \quad \text{e} \quad DC = 2r \tan \alpha,$$

mostrando-se, assim, que a função tangente está relacionada com a reta tangente, da mesma maneira que a função seno está relacionada com a corda. De fato, a construção da Ilustração 106 é a base da definição moderna das seis funções trigonométricas no círculo unitário.

## 6.8. A origem dos símbolos modernos para graus, minutos e segundos

A fonte é Cajori (1993).

Símbolos que lembram os que atualmente utilizamos são encontrados no Almagesto de Ptolomeu, onde as frações sexagesimais são usadas em cálculos astronômicos. As unidades eram frequentemente acompanhadas da abreviatura  $^{\circ}$ . Os primeiros sessenta-avos ou minutos eram marcados com um acento e os segundos sessenta-avos ou segundos eram marcados com dois acentos. Assim ter-se-ia, por exemplo,  $47^{\circ}42'40''$ . Poder-se-á pensar que os símbolos  $^{\circ}$ ,  $'$ ,  $''$  para graus, minutos e segundos têm origem grega. Contudo esta relação não está estabelecida, segundo a fonte que está a ser seguida.

Na tabela seguinte, observemos algumas das abreviaturas/símbolos utilizados:

| Século/Ano        | Autor/Obra   | Símbolos/Abreviaturas  |
|-------------------|--|--|
| Época Medieval    | Manuscritos medievais e primeiros livros impressos | Surgem abreviaturas de palavras latinas em vez dos símbolos $^{\circ}$ , $'$ , $''$ . Por exemplo, para a palavra latina <i>gradus</i> usa-se <i>gu</i> , <i>gdu</i> ou <i>gdus</i> .  |
| Século <i>XII</i> | Tradução de tabelas árabes                         | Os nomes <i>signa</i> , <i>gradus</i> , <i>minutae</i> , <i>secundae</i> , etc. são abreviados. As contrações não são sempre as mesmas, mas as mais comuns são <i>Sig.</i> , <i>Gr.</i> , <i>Min.</i> , <i>Sec.</i> .  |
| 1252              | Tabelas Afonsinas                                  | $42^2 32^1 15^m 4^2$ representa $49 \times 60 + 32 + 15 \times \frac{1}{60} + 4 \times \frac{1}{60^2}$ .   |
| 1515              | Edição do Almagesto de Ptolomeu de 1515            | Os símbolos $\ddot{s}$ , $\ddot{g}$ , $\ddot{m}$ são usados para <i>signa</i> , <i>gradus</i> , <i>minutae</i> .   |
| 1535              | Oronce Fine, <i>Arithmetica practica</i>           | Usa <i>grad</i> , $\tilde{m}$ , $\tilde{2}$ , $\tilde{3}$ .  |
| 1536              | Sebastianus Munsterus, <i>Organum Uranicum</i>     | Usa <i>S.</i> , <i>G.</i> , $\tilde{m}$ para <i>signa</i> , <i>gradus</i> , <i>minutae</i> .   |
| 1536              | Regius, <i>Vtrivsqve arithmetices epitome</i>      | Dá os símbolos <i>T</i> , <i>s</i> , <i>g</i> , <i>m</i> , <i>s</i> , <i>t</i> , <i>qr</i> , e num exemplo escreve <i>T</i> , <i>S</i> , <i>gr</i> , $\tilde{m}i$ , $2\tilde{a}$ , $3\tilde{a}$ , $4\tilde{a}$ , $5\tilde{a}$ . $1T$ (tota revolutio) é igual a $12S$ ( <i>signa</i> ), $1S$ é igual a $30 \text{ grad.}$ , $1gr.$ é igual a $60 \tilde{m}i$ . |

|      |  |  |
|------|--|--|
| 1541 | Peter Apianus, <i>Instrvmentvm sinvvm, sev primi mobilis</i> | Escreve $\tilde{g}$ ., $\tilde{m}$ ..  |
| 1566 | Nicolau Copérnico, <i>De Revolutionibus</i>                  | A tabela de senos está organizada em três colunas: a primeira coluna contém graus e minutos (chamados <i>circūferentiae pt., sec.</i> ); a segunda coluna dá os senos de ângulos para um raio de 100 000 partes (chamados <i>Semisses dup. circūfen.</i> , ou seja metade da corda do arco duplo); a terceira coluna tem o título Diferenças e contém as diferenças nos valores dos senos para ângulos que diferem 10 minutos. A abreviatura <i>scr.</i> toma o lugar de <i>sec.</i> . |
| 1563 | Gioseppe, <i>Moleta matemático</i>                           | Usa <i>Gra.</i> , <i>Mi.</i>   |
| 1551 | Schöner, <i>Opera mathematica</i>                            | Usa <i>S</i> , <i>gr</i> , $\tilde{m}$ <i>i.</i>   |
| 1556 | Pedro Nunes, <i>Petri Nonii Salaciensis Opera</i>            | Usa <i>Gr</i> , $\tilde{m}$ .  |
| 1591 | Lansberge, <i>Geometriae liber quatuor</i>                   | Não tem símbolo para graus e escreve 23 28' 30''.  |
| 1611 | Clavius, <i>Opera Mathematica</i>                            | Usa <i>G.</i> , <i>M.</i> , <i>S.</i> .  |

**Tabela 7 - Abreviaturas/símbolos para grau, minuto e segundo**

Os símbolos modernos aparecem no século XVI, assim, sem aparente relação com os símbolos gregos de Ptolomeu. Cajori (1993) mostra como os símbolos, que hoje usamos, surgem ligados à notação de expoente.

| Século/Ano | Autor/Obra   | Símbolos/Abreviaturas  |
|------------|--|--|
| 1540       | Gemma Frisius, <i>Arithmeticae practicae methodus facilis</i>  | Integr. Mi. 2. 3. 4.<br>36. 30. 24 50 15''<br>representa o moderno $36^{\circ}30'24''50'''15iv$  |
| 1558       | J. Peletier, <i>Appendix em frações astronómicas da edição de 1569 de Arithmeticae practicae methodus facilis</i> de Gemma Frisius | Integra, <i>Mi</i> vel $\tilde{1}$ , $\tilde{2}$ , $\tilde{3}$ , $\tilde{4}$ , $\tilde{5}$ , $\tilde{6}$ , $\tilde{7}$ , $\tilde{8}$ , etc<br>°<br>1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.<br>sendo esta a primeira aparição encontrada por Cajori (1993) de ° para <i>integra</i> ou graus. Esta notação é apenas usada para a multiplicação: minutos vezes segundos dá “terceiros” (terceira casa sexagesimal) pois 1+2=3.<br>É de notar que neste livro não se encontra a notação angular moderna ° ' ". De fato, para representar o ângulo de 12 minutos e 20 segundos escreve-se "S. 0. $\tilde{g}$ . 0. $\tilde{m}$ . 12. $\tilde{2}$ . 20". |

|  |   |   |
|--|---|---|
| 1570   | Johann Caramuel, <i>Mathsis Biceps Vetus, et Nova</i>   | Usa os símbolos $^{\circ} ' ''$ para designar ângulos.  |
| 1571   | Erasmus Reinhold, <i>Ptychenicae tabulae coelestium Motuum</i>  | Explica como usar frações sexagesimais aplicadas à medição de ângulos. Escreveu $63^{\circ}13'53''$ e $62^{\circ}54'18''$ . As posições de $^{\circ} ' ''$ são ligeiramente diferentes nos dois exemplos. |
| 1573   | Tycho Brahe, <i>Nova Stella</i>   | Adotou a notação anterior.  |
| 1586<br>1587<br>1588<br>1600<br>1610<br>1612<br>1626 | L. Shoner<br>Paul Reesen<br>Raymarus Ursus<br>Pitiscus<br>Herwart von Hohenburg<br>Peter Crüger<br>Albert Girard  | A notação $^{\circ} ' ''$ foi usada apenas com variações nos minutos.   |
| 1596<br><br>1604                                     | Rheticus, <i>Opus Palatinum triangulis</i><br>Kepler, <i>Ad vitellionem paralipomena quibus astronomiae pars optica traditur</i><br>Oughtherg, <i>Clavis mathematicae</i> | Adotaram a notação $^{\circ} ' ''$ .  |

**Tabela 8 - Símbolos modernos para grau, minuto e segundo: relação com a notação de expoente**

Contudo a notação não passa a ser universal. Muitos autores designam os graus por *Grad.* ou *Gr* ou *G*, minutos por *Min.* ou *M.*, segundos por *Sec.* ou *S.*. Por exemplo, numa edição de Horsley de um trabalho de Isaac Newton, encontra-se  $79^{\circ} 47' 48''$ .

A unidade *S* (signa) ocorre até ao final do século *XVIII*.

Vários escritores como Shoner, Reensen, Ursus e Wright (1616) usam  $^{\circ} ' ''$  em cima dos números, em vez da posição usual de expoente.

Em 1784, Georg Vega usa um semicírculo para  $45^{\circ}$  mas, ocasionalmente, usa o círculo completo ou zero.

O peso da evidência favorece a conclusão de que o símbolo  $^{\circ}$  para grau é o numeral zero usada como expoente e que não a letra grega ómicron.

Para evitar confusões entre a medição de ângulos e a medição de tempo, dado que ambas envolvem as palavras “minutos” e “segundos” e são usadas por astrónomos e navegadores, passou a ser comum marcar minutos e segundos de arco por  $'$  e  $''$ , e minutos e segundos de tempo por  $^m$  e  $^s$ .



## 6.9. A origem do termo radiano

A fonte é Cajori (1993) e o Site Web Radian (2013).

O conceito de radiano como medida, em oposição ao grau de um ângulo, é normalmente atribuída a Roger Cotes, em 1714. Ele usou o radiano em tudo, reconhece-o como unidade da medida angular mas não usa o nome. A ideia de medir ângulos pelo comprimento do arco já tinha sido usada por outros matemáticos. Por exemplo Al-Kāshī usava as chamadas partes do diâmetro como unidades, sendo uma parte do diâmetro  $1/60$  do radiano. Utilizava também subunidades sexagesimais das partes do diâmetro.

A palavra “radian” foi pela primeira vez usada na forma escrita em 1873 por James Thomson, em Belfast. Ele usava o termo desde 1871, enquanto em 1869, Thomas Muir vacilava entre os termos rad, radial e radiano. Em 1874, Muir adotou o termo radiano após consultar James Thomson.

Em termos de notação, era comum entre vários autores omitir a palavra “radian” quando era utilizado o sistema circular. Por exemplo usava-se  $\pi$  ou  $\frac{\pi}{2}$  quando tal significava  $\pi$  radianos ou  $\frac{\pi}{2}$  radianos. Também tinha sido proposto usar a letra grega  $\rho$  escrevendo-se  $2\rho$  ou  $\frac{3}{5}\pi\rho$  para designar, respectivamente, dois radianos e três quinto de  $\pi$  radianos. Foi usada a letra  $R$  em expoente, como  $\frac{\pi^R}{4}$  para  $\frac{\pi}{4}$  radianos ou a letra minúscula  $r$  como  $1^r$  para um radiano ou, ainda, a letra minúscula  $r$  entre parênteses como  $2^{(r)}$  para dois radianos.

A expressão “medida circular” de um ângulo levou à sugestão de que os radianos seriam indicados pela letra minúscula  $^c$  ou seja  $2^c$  significaria dois radianos. Contudo, quando o radiano é a unidade angular é usual usar letras gregas para denotar o número de radianos e o símbolo  $^c$  é frequentemente omitido.

## Capítulo 7- Atividades

Neste capítulo encontram-se quatro atividades para a sala de aula para aplicação no 9º ano ou no ensino secundário.

Poderiam ter aparecido outras atividades ou mais atividades. Optou-se por escolher quatro matemáticos de diferentes partes do Mundo que trouxeram contributos diversos à história da Trigonometria Plana.

Em qualquer das atividades está presente o programa de geometria dinâmica GeoGebra nas suas diversas vistas, entre as quais a 3D. Para além disso pretende-se, nas quatro atividades, o desenvolvimento do espírito de investigação, conjectura e demonstração.

### 7.1. Atividade 1: Como Ptolomeu determinou o valor de $\text{crd}(1^\circ)$ ?

Nesta atividade pretende-se que o aluno determine o valor da  $\text{crd}(1^\circ)$  usando os métodos de Ptolomeu.

#### Saberes mobilizados pelo aluno

- Conhecer propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência.
- Comparar áreas.
- Trabalhar com o sistema sexagesimal.
- Reconhecer propriedades da relação de ordem em  $\mathbb{R}$ .
- Utilizar programas de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra.
- Utilizar procedimentos demonstrativos.
- Desenvolver o raciocínio hipotético dedutivo através da capacidade de argumentação.
- Apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo.

## Introdução à atividade

As razões trigonométricas, tal como nós as conhecemos, demoraram muitos séculos a serem formuladas. Tudo começou quando vários matemáticos e astrónomos trabalharam com cordas de uma circunferência. Um desses matemáticos foi Ptolomeu.



Figura 1 – Ptolomeu

Ptolomeu viveu e trabalhou em Alexandria por volta de 150 a. C.. O seu principal trabalho ficou conhecido por *Almagesto* que significa “o maior”. Esta obra teve o mesmo papel na astronomia matemática que os *Elementos* de Euclides na geometria. O *Almagesto* foi ainda capaz de fazer as obras dedicadas ao mesmo tema supérfluas, ficando inclusive esquecidas.

Na *Coleção Matemática*, nome dado por Ptolomeu a esta obra, são desenvolvidos modelos astronómicos e expostas as ferramentas

matemáticas necessárias à astronomia, entre as quais a trigonometria. A maneira como Ptolomeu apresenta as suas ideias é considerada uma obra-prima pelo rigor e explicações apresentadas.

É no primeiro livro do *Almagesto*, mais propriamente nos capítulos 10 e 11 que Ptolomeu desenvolve a trigonometria. No capítulo 11 apresenta uma tabela de cordas cuja explicação é dada no capítulo 10.

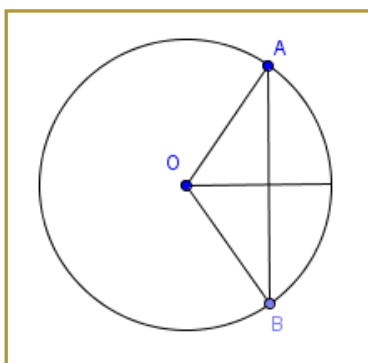
| Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν |           |           | Table of Chords |           |           |
|-------------------------------|-----------|-----------|-----------------|-----------|-----------|
| περιφ. ρειῶν                  | εὐθειῶν   | ἑξηκοστῶν | arcs            | chords    | sixtieths |
| Λ'                            | σ λα κε   | σ α β ν   | 1°              | 0;31,25   | 0;1,2,50  |
| α Λ'                          | α β ν     | σ α β ν   | 1°              | 1;2,50    | 0;1,2,50  |
| α Λ'                          | α λδ ιε   | σ α β ν   | 1½°             | 1;34,15   | 0;1,2,50  |
| β Λ'                          | β ε μ     | σ α β ν   | 2°              | 2;5,40    | 0;1,2,50  |
| β Λ'                          | β λζ δ    | σ α β ν   | 2½°             | 2;37,4    | 0;1,2,48  |
| γ Λ'                          | γ η κη    | σ α β ν   | 3°              | 3;8,28    | 0;1,2,48  |
| γ Λ'                          | γ λθ νθ   | σ α β ν   | 3½°             | 3;39,52   | 0;1,2,48  |
| δ Λ'                          | δ ια ις   | σ α β ν   | 4°              | 4;11,16   | 0;1,2,47  |
| δ Λ'                          | δ μβ μ    | σ α β ν   | 4½°             | 4;42,40   | 0;1,2,47  |
| ε Λ'                          | ε ιδ δ    | σ α β ν   | 5°              | 5;14,4    | 0;1,2,46  |
| ε Λ'                          | ε με κζ   | σ α β ν   | 5½°             | 5;45,27   | 0;1,2,45  |
| ς Λ'                          | ς ις μθ   | σ α β ν   | 6°              | 6;16,49   | 0;1,2,44  |
| ς Λ'                          | ς μη ια   | σ α β ν   | 6½°             | 6;48,11   | 0;1,2,43  |
| ζ Λ'                          | ζ ιθ λγ   | σ α β ν   | 7°              | 7;19,33   | 0;1,2,42  |
| ζ Λ'                          | ζ ν νδ    | σ α β ν   | 7½°             | 7;50,54   | 0;1,2,41  |
| ·                             | ·         | ·         | ·               | ·         | ·         |
| ροδ Λ'                        | ριθ να μγ | σ α β ν   | 174½°           | 119;51,43 | 0;0,2,53  |
| ροε Λ'                        | ριθ νγ ι  | σ α β ν   | 175°            | 119;53,10 | 0;0,2,36  |
| ροε Λ'                        | ριθ νδ κς | σ α β ν   | 175½°           | 119;54,27 | 0;0,2,20  |
| ρος Λ'                        | ριθ νε λη | σ α β ν   | 176°            | 119;55,38 | 0;0,2,3   |
| ρος Λ'                        | ριθ νς λθ | σ α β ν   | 176½°           | 119;56,39 | 0;0,1,47  |
| ροζ Λ'                        | ριθ νς λβ | σ α β ν   | 177°            | 119;57,32 | 0;0,1,30  |
| ροζ Λ'                        | ριθ νη ιη | σ α β ν   | 177½°           | 119;58,18 | 0;0,1,14  |
| ροη Λ'                        | ριθ νη νε | σ α β ν   | 178°            | 119;58,55 | 0;0,0,57  |
| ροη Λ'                        | ριθ νθ κδ | σ α β ν   | 178½°           | 119;59,24 | 0;0,0,41  |
| ροθ Λ'                        | ριθ νθ μδ | σ α β ν   | 179°            | 119;59,44 | 0;0,0,25  |
| ροθ Λ'                        | ριθ νθ νς | σ α β ν   | 179½°           | 119;59,56 | 0;0,0,9   |
| ρπ                            | ρκ σ σ    | σ α β ν   | 180°            | 120;0,0   | 0;0,0,0   |

Figura 2 – Tabela de Cordas de Ptolomeu  
(Maor, 1998)

Nas tabelas trigonométricas usadas hoje em dia estão listados os valores de duas funções trigonométricas básicas, o seno e o cosseno, de um ângulo  $\alpha$ . Ptolomeu não tabela qualquer uma destas funções. Na sua tabela representa os comprimentos das cordas correspondentes a um dado arco de amplitude de  $\alpha$  graus, num círculo de raio 60. A relação entre a tabela de cordas de Ptolomeu e o valor de seno atual é dada pela expressão:

$$crd\alpha = 120 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

que resulta de:



$$\checkmark \hat{AOB} = x$$

$$\checkmark \overline{OB} = r = 60$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\overline{AB}}{2r} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow \overline{AB} = 120 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Figura 3 – Ângulo, corda e arco

Para além disso, como podes ver na tabela, os valores de  $crd\alpha$  são apresentados de  $0,5^\circ$  em  $0,5^\circ$  até  $180^\circ$ . Até Ptolomeu chegar a estes valores, teve de percorrer um longo caminho de teoremas, demonstrações e cálculos.

Uma das partes cruciais da construção da tabela foi a determinação de  $crd1^\circ$ . Na tabela, podemos ver que o seu valor na notação sexagesimal é  $1; 2,50$  ( $1; 2,50 = 1 + 2 \times \frac{1}{60} + 50 \times \frac{1}{60^2} = 0,047(2)$ ).

#### Atividade – Parte 1 – Dedução do Teorema a demonstrar usando o GeoGebra

1. Abre o seguinte ficheiro: [Ptolomeu\\_Corda1.ggb](#)
2. Faz a animação do seletor.
3. Observa a tabela que foi gerada.
  - a) Verifica o que acontece quando  $\beta = 1^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  e  $89^\circ$ :
    - compara os valores de  $\beta$  com os valores de  $\alpha$  correspondentes;
    - compara os valores de  $crd\beta$  com  $crd\alpha$ ;
    - compara as razões entre os ângulos e as razões entre as cordas.
  - b) A relação que verificaste anteriormente entre os ângulos e as cordas verifica-se para qualquer valor de  $\beta$ ?
  - c) Escreve uma conjectura para a relação entre as razões entre os ângulos e as respetivas cordas.

## Atividade – Parte 2 – A demonstração do Teorema

**Teorema:** “Se forem dadas duas cordas desiguais, sendo a corda  $\alpha$  maior que a corda  $\beta$ , então  $\frac{crd\alpha}{crd\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$ .”

Considera dois arcos menores que  $180^\circ$  e que são determinados pelas cordas  $AB$  e  $BC$ , onde  $AB < BC$ .

Pretendemos provar que:  $\frac{BC}{AB} < \frac{arcBC}{arcAB}$ .

A1) Começamos por bisetar o ângulo em  $B$ , e prolongamos  $BE$  ( $E$  em  $AC$ ) até encontrar o círculo em  $D$ . Justifica que  $AC = DC$ .

A ângulos iguais correspondem cordas iguais.

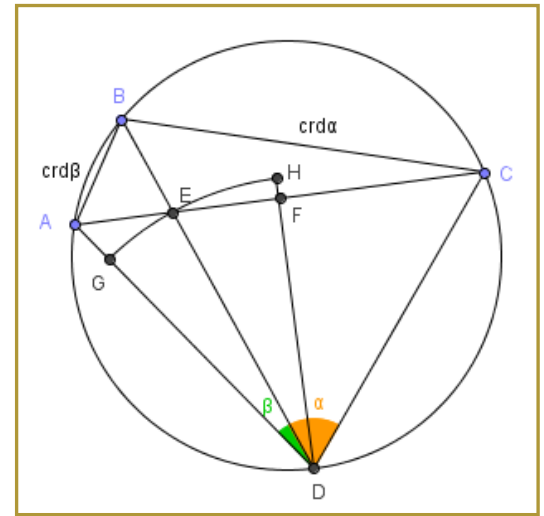


Figura 4 – Corda de 1ª

A2) Aplicando Euclides VI, 3 (O bissetor de um ângulo num triângulo, corta o lado oposto em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes) ao triângulo  $ABC$  vem:

$$\frac{AE}{EC} < \frac{AB}{BC}.$$

O que concluis acerca da relação entre  $AE$  e  $EC$ ? Conclui-se que  $AE < EC$  pois  $AB < BC$ .

A3) Traçamos a partir  $D$  a perpendicular  $DF$  em  $AC$ ;  $F$  é o ponto médio de  $AC$ . Qual a relação entre  $AD$ ,  $ED$  e  $FD$ ?

$AD > ED > FD$ .

A4) O círculo de centro  $D$  e raio  $ED$  vai cortar  $AD$  entre  $A$  e  $D$ , em  $G$ , e  $DF$  (prolongado para além de  $F$ ) em  $H$ . Considerando os sectores  $DEG$  e  $DEH$ , mostra que  $\frac{\Delta DEF}{\Delta DEA} < \frac{setorDEH}{setorDEG}$ , justificando.

$$setorDEH > \Delta DEF$$

e

$$setorDEG < \Delta DEA$$

Então:

$$\frac{\Delta DEF}{\Delta DEA} < \frac{setorDEH}{setorDEG}.$$

A5) Para os triângulos  $DEF$  e  $DEA$ , justifica que a razão entre as suas áreas é igual à razão entre as suas bases.

Como triângulos têm a altura  $DF$  em comum vem:

$$\frac{\Delta DEF}{\Delta DEA} = \frac{\frac{EF \cdot DF}{2}}{\frac{EA \cdot DF}{2}} = \frac{EF}{EA}$$

A6) Mostra que a razão entre os setores  $DEH$  e  $DEG$  é igual à razão entre os seus ângulos ao centro.

$$\frac{\text{setor}DEH}{\text{setor}DEG} = \frac{\frac{\widehat{EDH} \cdot \pi \cdot ED^2}{360^\circ}}{\frac{\widehat{EDG} \cdot \pi \cdot ED^2}{360^\circ}} = \frac{\widehat{EDH}}{\widehat{EDG}}.$$

A7) Substituindo as razões obtidas em A5) e A6) em  $\frac{\Delta DEF}{\Delta DEA} < \frac{\text{setor}DEH}{\text{setor}DEG}$ , obtemos  $\frac{EF}{EA} < \frac{\widehat{EDH}}{\widehat{EDG}}$ .

Aplica a seguinte sequência de procedimentos de forma a obter  $\frac{EC}{EA} < \frac{\widehat{CDE}}{\widehat{EDG}}$ .

A71) Adiciona a unidade a ambos os lados da desigualdade.

$$\frac{EF + EA}{EA} < \frac{\widehat{EDH} + \widehat{EDH}}{\widehat{EDG}} \Leftrightarrow \frac{AF}{EA} < \frac{\widehat{GDH}}{\widehat{EDG}}.$$

A72) Ao resultado obtido em A71), multiplica por 2 ambos os membros da desigualdade.

$$\frac{2 \cdot AF}{EA} < \frac{2 \cdot \widehat{GDH}}{\widehat{EDG}} \Leftrightarrow \frac{AC}{EA} < \frac{\widehat{ADC}}{\widehat{EDG}}.$$

A73) Ao resultado obtido em A72) subtrai uma unidade a ambos os lados da desigualdade.

$$\frac{AC - EA}{EA} < \frac{\widehat{ADC} - \widehat{EDG}}{\widehat{EDG}} \Leftrightarrow \frac{EC}{EA} < \frac{\widehat{CDE}}{\widehat{EDG}}.$$

A8) Justifica que  $\frac{BC}{AB} < \frac{\text{arc}BC}{\text{arc}AB}$ .

Usando  $\frac{AE}{EC} < \frac{AB}{BC}$  e o facto de um ângulo inscrito ser metade do arco que o subentende, podemos

escrever  $\frac{EC}{EA} < \frac{\widehat{CDE}}{\widehat{EDG}}$  da seguinte forma:

$$\frac{BC}{AB} < \frac{\text{arc}BC}{\text{arc}AB}.$$

A aplicação do Teorema na determinação de  $\text{crd}(1^\circ)$ .

a) Aplica o Teorema fazendo  $\alpha = 1\frac{1}{2}^\circ$  e  $\beta = 1^\circ$  e obtém um minorante para  $\text{crd}(1^\circ)$ .

$$\frac{\text{crd}\left(1\frac{1}{2}^\circ\right)}{\text{crd}(1^\circ)} < \frac{1\frac{1}{2}^\circ}{1^\circ} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\text{crd}\left(1\frac{1}{2}^\circ\right)}{\text{crd}(1^\circ)} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\text{crd}(1^\circ)}{\text{crd}\left(1\frac{1}{2}^\circ\right)} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow \text{crd}(1^\circ) > \frac{2}{3} \cdot \text{crd}\left(1\frac{1}{2}^\circ\right)$$

Recorrendo à tabela obtemos o valor de  $\text{crd}\left(1\frac{1}{2}^\circ\right) = 1;34,15$  e então:

$$\text{crd}(1^\circ) > \frac{2}{3} \cdot \text{crd}\left(1\frac{1}{2}^\circ\right) = \frac{2}{3} \cdot 1;34,15 = 0;40 \cdot 1;34,15 = 1;2,50,10$$

b) Aplica o Teorema fazendo  $\alpha = 1^\circ$  e  $\beta = \frac{3}{4}^\circ$  e obtém um majorante de  $crd(1^\circ)$ .

$$\frac{crd(1^\circ)}{crd\left(\frac{3}{4}^\circ\right)} < \frac{1^\circ}{\frac{3}{4}^\circ} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{crd(1^\circ)}{crd\left(\frac{3}{4}^\circ\right)} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow crd(1^\circ) < \frac{4}{3} \cdot crd\left(\frac{3}{4}^\circ\right) = \frac{4}{3} \cdot 0;47,8 = 1;20 \cdot 0;47,8 = 1;20,50,40$$

c) Conclui que  $crd(1^\circ) = 1;2,50$  com duas casas sexagesimais.

$$1;2,50,10 < crd(1^\circ) < 1;2,50,40$$

Ptolomeu conclui desta forma que  $crd(1^\circ) = 1;2,50$

d) A partir do valor anterior, determina  $crd\left(\frac{1}{2}^\circ\right)$ .

$$\text{Usando a fórmula da corda do arco metade vem } crd\left(\frac{1}{2}^\circ\right) = 0;31,15.$$

## 7.2. Atividade 2: O Seno Indiano e Bhāskara

### Saberes mobilizados pelo aluno

- *Apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo.*
- *Reconhecer propriedades da relação de ordem em  $\mathbb{R}$ .*
- *Resolver sistemas de equações.*
- *Utilizar programas de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra.*
- *Utilizar procedimentos demonstrativos.*
- *Desenvolver o raciocínio hipotético dedutivo através da capacidade de argumentação.*
- *Desenvolver o gosto pela pesquisa.*

### Um pouco de história

O nome indiano para Trigonometria é *Jyotpatti-ganita* ou “A ciência do cálculo da construção do seno”. Por vezes o nome é abreviado para *Jyā-ganita* ou “A ciência do cálculo dos senos”. Nos anos mais recentes apareceu com o nome *Trikonamiti*, por aproximação literal e fonética ao nome grego.

A obra indiana mais antiga conhecida e que inclui trigonometria é o *Paitāmahasiddhānta*, escrito no princípio do século V.

Para sustentar os cálculos de trigonometria esférica para resolver problemas astronômicos, o *Paitāmahasiddhānta* contém uma tabela de semicordas. Foi provavelmente um matemático indiano desconhecido que decidiu que seria muito mais prático tabelar as semicordas do ângulo duplo em vez das próprias cordas, tal como havia feito Ptolomeu. Assim neste trabalho, como em todas as obras indianas seguintes, é a função da semicorda que é utilizada.

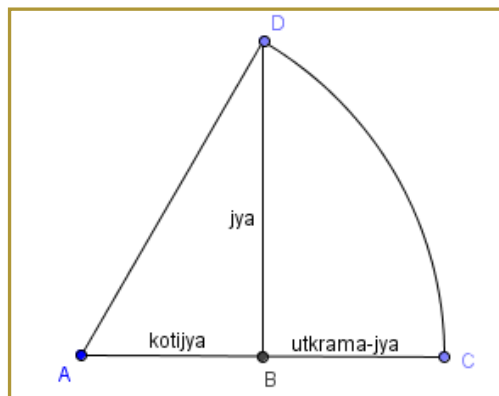
Os indianos chamaram à função da semicorda *ardha-jyā*, que literalmente significa corda metade. Com o tempo este termo foi encurtado para *jyā* or *jiva*.

A corda, a *jyā*, foi definida então como o comprimento de um certo segmento de reta num círculo. Na figura 1 o arco *CD* corresponde a  $\theta$  e *BD* é *jyā*. Assim a relação entre *jyā* e o seno moderno é:

$$jyā(\theta) = R \sin \theta,$$

onde *R* é o raio do círculo.

O *kotijyā*, ou cosseno, é o comprimento *AB* da figura.



O seno verso é dado por  $vers\theta = 1 - \cos\theta$ .

Figura 1 – Seno, Cosseno e Seno Verso indianos

Note-se que o valor do raio no *Paitāmahasiddhānta* é de 3438 e, por isso, pensa-se que foi a trigonometria de Hiparco e não a de Ptolomeu que chegou primeiro à Índia.

### Bhāskara I e a aproximação racional do seno

O método de Bhāskara I para calcular o seno sem recorrer a geometria foi audacioso. Pouco se sabe dele. Um dos seus trabalhos mais conhecidos é *Mahābhāskarīya* que significa “O Grande (trabalho) de Bhāskara” escrito por volta de 600 a.C.. Neste trabalho encontra-se uma aproximação notável para o seno dado como razão de duas funções quadráticas.

Como já antes tinha acontecido com outro grande astrônomo, Āryabhata, Bhāskara, apresenta a fórmula para calcular os senos sem qualquer explicação. Em notação moderna ele afirma que:

$$\sin\theta = R \cdot \frac{4\theta(180-\theta)}{40500-\theta(180-\theta)}.$$



Figura 2 – Bhāskara I



## Parte 1: Obtenção dos valores de Bhāskara usando o GeoGebra

1. Abrir o GeoGebra.
2. Verificar se estão abertas a Folha Algébrica, a Folha Gráfica e a Folha de Cálculo.
3. Criar um seletor  $a$  para o ângulo (intervalo  $[0,180]$  e incremento 0.1).
4. Introduzir no campo de entrada:

a) as funções seno indiano de Bhāskara e seno atual:

$$f(x) = \frac{4x(180-x)}{40500-x(180-x)} \quad e \quad g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)$$

As duas funções são desenhadas na Folha Gráfica!

Usa cores diferentes para cada gráfico.

b) os seguintes pares ordenados:

- o par ordenado com abcissa igual à amplitude do ângulo e ordenada igual ao seno atual:

$$A\left(a, \sin\left(\frac{\pi a}{180}\right)\right);$$

- o par ordenado com abcissa igual à amplitude do ângulo e ordenada igual à diferença entre o seno indiano de Bhāskara e o seno atual:  $B\left(a, \frac{4a(180-a)}{40500-a(180-a)} - \sin\left(\frac{\pi a}{180}\right)\right).$

5. Importar os valores das coordenadas de  $C$  para a Folha de Cálculo realizando o seguinte procedimento: Clicar em  $C$  e com o botão direito do rato selecionar *Importar Dados para a Folha de Cálculo*.
6. No menu Opções, selecionar *Arredondamento* com 15 algarismos significativos.
7. Animar o seletor: à medida que o seletor se movimenta o mesmo acontece com os pontos  $A$  e  $B$  na Folha Gráfica; na Folha de Cálculo observamos os valores do ângulo e do erro cometido pela fórmula de Bhāskara.
8. O que podes dizer acerca das representações gráficas das duas funções? Para que valores as duas funções são praticamente indistinguíveis?

As duas funções são praticamente indistinguíveis para os valores do ângulo entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ .

9. Na folha de cálculo verifica qual é o número mínimo de algarismos significativos do erro cometido.

O número mínimo de algarismos significativos é 3.

## Parte 2: a demonstração da fórmula de Bhāskara

A aproximação de Bhāskara foi utilizada e modificada posteriormente por vários astrónomos indianos até ao século XVI. Contudo nenhum deles respondeu à questão: como é que Bhāskara chegou à fórmula:

$$\sin \theta = R \cdot \frac{4\theta(180 - \theta)}{40500 - \theta(180 - \theta)} ?$$

Vamos explorar uma dessas explicações sendo a única que tem base geométrica.

Considere-se a figura 3 onde  $AC$  é igual a  $2R$ :

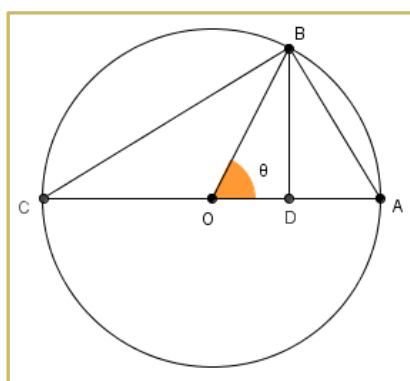


Figura 3 – Demonstração geométrica da fórmula de Bhāskara I

Considerando  $BD = \sin \theta$ , mostra que  $\sin \theta = BD = \frac{AB \cdot BC}{AC}$ .

*Sugestão: Começa por escrever duas expressões para o valor da área do triângulo ABC e de seguida iguala-as.*

A área de  $\triangle ABC$  é igual a  $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC$  mas também é igual a  $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$  e por isso  $AB \cdot BC = AC \cdot BD$ .

Fazendo  $BD = \sin \theta$  vem  $\sin \theta = BD = \frac{AB \cdot BC}{AC}$

1. Mostra que  $\frac{\theta(180^\circ - \theta)}{2R}$  é um majorante de  $\sin \theta$ .

$$\sin \theta = BD = \frac{AB \cdot BC}{AC} < \frac{\text{arc}AB \cdot \text{arc}BC}{AC} = \frac{\text{arc}AB \cdot \text{arc}BC}{2R} = \frac{\theta(180^\circ - \theta)}{2R}$$

2. Consideram-se agora duas variáveis  $x$  e  $y$  de forma a obter a igualdade:

$$\frac{1}{\sin \theta} = x \cdot \left( \frac{2R}{\theta(180^\circ - \theta)} \right) + y \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \theta} = \frac{2xR + y\theta(180^\circ - \theta)}{\theta(180^\circ - \theta)}.$$

Substituímos na igualdade anterior  $\sin 30^\circ = \frac{R}{2}$  e  $\sin 90^\circ = R$  e obtemos um sistema de duas equações em  $x$  e  $y$ :

$$\begin{cases} \frac{2}{R} = \frac{2xR + y \cdot 30^\circ(180^\circ - 30^\circ)}{30^\circ(180^\circ - 30^\circ)} \\ \frac{1}{R} = \frac{2xR + y \cdot 90^\circ(180^\circ - 90^\circ)}{90^\circ(180^\circ - 90^\circ)} \end{cases}$$

Resolve o sistema anterior em ordem a  $y$  e a  $2xR$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{2}{R} = \frac{2xR + y \cdot 30^\circ(180^\circ - 30^\circ)}{30^\circ(180^\circ - 30^\circ)} \\ \frac{1}{R} = \frac{2xR + y \cdot 90^\circ(180^\circ - 90^\circ)}{90^\circ(180^\circ - 90^\circ)} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{R} = \frac{2xR + 4500y}{4500} \\ \frac{1}{R} = \frac{2xR + 8100y}{8100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{R} = \frac{2xR}{4500} + y \\ \frac{1}{R} = \frac{2xR}{8100} + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{R} - \frac{2xR}{4500} \\ \frac{1}{R} = \frac{2xR}{8100} + \frac{2}{R} - \frac{2xR}{4500} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \frac{1}{R} = \frac{10xR}{40500} - \frac{18xR}{40500} \\ \frac{1}{R} = \frac{10xR}{40500} - \frac{8xR}{40500} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{R} = \frac{10xR}{40500} - \frac{18xR}{40500} \\ \frac{1}{R} = \frac{10xR}{40500} - \frac{8xR}{40500} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{R} = \frac{10xR}{40500} - \frac{18xR}{40500} \\ \frac{40500}{8R} = xR \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{R} = \frac{10xR}{40500} - \frac{18xR}{40500} \\ 2xR = \frac{40500}{4R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{R} - \frac{40500}{18000R} = \frac{2}{R} - \frac{9}{4R} = -\frac{1}{4R} \\ 2xR = \frac{40500}{4R} \end{cases} \end{aligned}$$

3. Substitui os valores obtidos de  $2xR$  e  $y$  em  $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{2xR + y\theta(180^\circ - \theta)}{\theta(180^\circ - \theta)}$  de forma a obter a fórmula procurada.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} &= \frac{\frac{40500}{4R}}{\theta(180^\circ - \theta)} - \frac{1}{4R} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \theta} = \frac{40500}{4R\theta(180 - \theta)} - \frac{1}{4R} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\sin \theta} &= \frac{40500}{4R\theta(180 - \theta)} - \frac{\theta(180 - \theta)}{4R\theta(180 - \theta)} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \theta} = \frac{40500 - \theta(180 - \theta)}{4R\theta(180 - \theta)} \Leftrightarrow \\ \sin \theta &= \frac{4R\theta(180 - \theta)}{40500 - \theta(180 - \theta)} \Leftrightarrow \sin \theta = R \cdot \frac{4R\theta(180 - \theta)}{40500 - \theta(180 - \theta)}. \end{aligned}$$

### Parte 3: Um exemplo de aplicação da fórmula

1. Usa a fórmula de Bhāskara I para calcular o valor de Seno de  $\theta = 20^\circ$ .

$$3438 \sin 20 = 3438 \cdot \frac{4 \cdot 20 \cdot 160}{40500 - 20 \cdot 160} \approx 1180$$

2. Compara o valor obtido com o valor atual de Seno de  $20^\circ$ .

$$\text{Seno Indiano: } 3438 \cdot \frac{12800}{37300} \sim 1180$$

$$\text{Seno "atual": } 3438 \sin 20^\circ \sim 1175,86525$$

$$\text{Seno Indiano de } 20^\circ > \text{Seno atual de } 20^\circ$$

3. Calcula o erro cometido, usando os valores do valor indiano de seno de  $20^\circ$  e o valor atualmente utilizado.

$$\text{seno indiano: } \frac{12800}{37300} \sim 0,3432228 \dots$$

$$\text{seno atual: } \sin 20^\circ \sim 0,3420201 \dots$$

$$\text{Erro: } \frac{12800}{37300} - \sin 20^\circ = 0,001143 \dots$$

### A origem da palavra seno

Investiga na internet como apareceu a palavra seno. Descobrirás que está relacionado com os indianos!

A corda metade era chamada jiva em sânscrito. Os astrónomos muçulmanos aprenderam a partir da tradição grega e dos indianos, incluindo no seu trabalho tabelas de cordas metade. Por isso foram buscar ao sânscrito o nome jiva. Em árabe e em hebreu, apenas se escrevem as consoantes de uma palavra, deixando-se as vogais para serem colocadas pelo leitor. A palavra invulgar do sânscrito jiva tem as mesmas consoantes que a vulgar palavra árabe jaib, que significa dobra, bolso ou seio. Por isso não é surpreendente que quando os trabalhos dos astrónomos árabes foram traduzidos para latim, os tradutores que sabiam árabe, e não sânscrito, liam o título das tabelas de cordas metade como jaib e traduziram para a palavra latina dobra, bolso ou seio, que é sinus. Foi assim que a função seno recebeu o seu nome curioso.

### 7.3. Atividade 3: As funções trigonométricas árabes e o valor de $\sin 1^\circ$ de Al-Kashi

#### Saberes mobilizados pelo aluno

- *Apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo.*
- *Resolver equações 3º grau usando procedimentos gráficos.*
- *Aplicar procedimentos iterativos.*
- *Utilizar a Folha de Cálculo do GeoGebra para avaliar a convergência de uma sucessão.*

#### Um pouco de história

Um *Siddhanta* indiano foi trazido para Bagdad nos finais do século *VIII* e traduzido por um árabe. Foi desta forma que os estudiosos islâmicos tomaram conhecimento dos conhecimentos de trigonometria indiana que era inspirada no grego Hiparco. Também o *Almagesto* de Ptolomeu viria a ser traduzido para árabe. À semelhança dos indianos, os árabes absorvem os conhecimentos que encontram noutras culturas e apresentam novas ideias.

Tal como na Grécia e na Índia, também a trigonometria no mundo árabe estava ligada à Astronomia e os textos sobre trigonometria aparecem como capítulos de trabalhos astronómicos mais extensos. De fato, os matemáticos árabes estavam particularmente interessados em usar a trigonometria para resolver triângulos esféricos pois a lei islâmica exigia que os muçulmanos se voltassem para Meca para orar. Assim, era necessário determinar a direção e o sentido apropriados relativamente ao lugar que se ocupava no momento, e tal exigia um conhecimento extenso da solução desses triângulos sobre a esfera da Terra. A resolução de triângulos planos e esféricos era também necessária para determinar os tempos corretos para as orações.

#### Al-Kāshī (1380-1429)



O astrónomo iraniano Al-Kāshī foi o maior cientista computacional do seu tempo. Os seus feitos ainda estão a ser descobertos hoje em dia.

Na sua terceira obra-prima, *Risāla al-watar wa'l-jaib*, Tratado sobre a Corda e Seno, o iraniano Al-Kāshī calcula o seno de  $1^\circ$  com 10 casas decimais corretas. Esta precisão era essencial para o rigor das tabelas astronómicas. Não se sabe se foi Al-Kāshī que completou este tratado ou se foi completado após a sua morte. De notar que este tratado na sua forma original está perdido. Contudo como o seu método provocou várias reações e variantes, podemos reconstruí-lo com alguma precisão.

Figura 1 – Al-Kāshī

Ptolomeu para determinar o valor de  $crd(1^\circ)$  usa a desigualdade:

$$\frac{2}{3}crd\left(\frac{3}{2}^\circ\right) < crd(1^\circ) < \frac{4}{3}crd\left(\frac{4}{3}^\circ\right),$$

que dá uma aproximação para  $crd(1^\circ)$  correta até duas casas sexagesimais, pois ambos os extremos da desigualdade se iniciam com 1; 2,50. O método tem uma limitação inerente e que tem a ver com esses extremos: sem novos extremos não há possibilidade de melhorar a precisão.

Note-se que Al-Kāshī usa  $R = 60$ .

O método de Al-Kāshī dá aproximações de  $Sin(1^\circ)$  e baseia-se em duas relações:

$$(1) \quad Sin(3\theta) = 3Sin(\theta) - 0;0,4 (Sin\theta)^3, \quad \text{que com } \theta = 1^\circ \text{ fica:} \\ Sin(3) = 3Sin(1^\circ) - 0;0,4 (Sin1^\circ)^3$$

$$(2) \quad Sin(3^\circ) = 3;8,24,33,59,34,28,15, \text{ que é um valor correto até às casas sexagesimais apresentadas.}$$

1. Explica como a partir dos valores de  $Sin(72^\circ)$  e  $Sin(60^\circ)$ , das fórmulas do seno da diferença de dois arcos e da fórmula do ângulo metade se pode obter o valor de  $Sin(3^\circ)$ .

O valor de  $Sin(3^\circ)$  pode ser determinado com tantas casas decimais quantas necessárias pois os procedimentos euclidianos permitem encontrar os valores de  $Sin(72^\circ)$  e  $Sin(60^\circ)$

A partir daqui entra a fórmula do seno da diferença de dois arcos que observamos com Abū'l-Wafā no século X:

$$Sin(12^\circ) = Sin(72^\circ - 60^\circ).$$

Pela fórmula do ângulo metade, usada repetidamente obtemos  $Sin(6^\circ)$  e  $Sin(3^\circ)$ .

2. Fazendo  $\theta = 1^\circ$  e  $x = Sin(1^\circ)$  e usando a relação (1) obtemos  $Sin(3^\circ) = 3x - 0;04x^3$ . A solução desta equação de 3º grau é o valor de  $Sin(1^\circ)$ .

a) Determina a solução da equação de 3º grau antes referida usando métodos gráficos (sugestão: usa a calculadora gráfica).

Com a calculadora TI-84 um dos zeros da função  $f(x) = -0;04x^3 + 3x - Sin(3^\circ)$  é 1;2,48,11,20,49,55, ...

b) Vamos agora seguir o método de Al-Kāshī, cujo método é não analítico.

B1) Isola o termo em  $x$  da equação  $Sin(3^\circ) = 3x - 0;04x^3$ .

Nota: exprime todos os números obtidos em notação sexagesimal.

$$\sin(3^\circ) = 3x - 0,04x^3 \Leftrightarrow x = \frac{\sin(3^\circ) - 0,04x^3}{3} \Leftrightarrow x = \frac{900\sin(3^\circ) - 1x^3}{2700} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{x^3 + 900 \cdot 3;8,24,33,59,34,28,15}{2700} \Leftrightarrow x = \frac{x^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0}$$

B2) Já sabemos de estimativas anteriores que  $x = 1; a, b, c, \dots$  o que faz com que o termo do numerador  $x^3$  seja bastante mais pequeno que 47,6; 8, .... Assim podemos escrever  $x = 1; a, b, c, d, \dots$  sendo  $a, b, c, d \dots$  as casas sexagesimais da raiz da equação e obtemos:

$$1; a, b, c, \dots = \frac{(1; a, b, c, \dots)^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0}.$$

B12) Subtrai uma unidade a ambos os membros da igualdade anterior.

$$1; a, b, c, \dots - 1 = \frac{(1; a, b, c, \dots)^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0} - 1$$

$$\Leftrightarrow 0; a, b, c, \dots = \frac{(1; a, b, c, \dots)^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45 - 2700}{45,0}$$

$$\Leftrightarrow 0; a, b, c, \dots = \frac{(1; a, b, c, \dots)^3 + 2,6;8,29,53,37,3,45, \dots}{45,0}$$

B22) Como se sabe que o valor de  $x$  é um valor muito próximo de 1, substitui  $x$  por 1. Qual o valor de  $a$  que obtiveste?

$$\frac{(1)^3 + 2,6;8,29,53,37,3,45, \dots}{45,0} = 0; 2,49,31, \dots$$

Obtemos  $a = 2$ .

B23) Para se chegar à próxima casa sexagesimal, repetimos o processo, considerando  $x = 1; 2$ . Qual o valor que obténs para  $b$ ?

Subtraímos 1; 2 de ambos os membros. Obtemos:

$$1; 2, b, c, \dots - 1; 2 = \frac{(1; 2, b, c, \dots)^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0} - 1; 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0; 0, b, c, \dots = \frac{(1; 2, b, c, \dots)^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0} - 1; 2$$

$$\frac{(1; 2)^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0} - 1; 2 = 0; 0,49,39,36, \dots$$

o que nos dá a casa sexagesimal seguinte. Assim  $b = 49$ .

Al-Kāshī continua o processo até 10 casas sexagesimais, concluindo que:

$$\sin(1^\circ) = 1; 2,49,43,11,14,44,16,19,16$$

Todos os valores estão corretos à exceção dos últimos dois – que deveriam ser 26,18. Contudo o valor é muito bom para os cálculos que eram necessários fazer.

As ferramentas que Al-Kāshī usa – a fórmula do ângulo triplo e a iteração - estavam disponíveis há séculos. Mas Al-Kāshī foi o primeiro a juntar estas duas ideias usando a linguagem da álgebra.

Obteve-se assim uma tabela monumental de senos de último grito com cinco casas sexagesimais para cada minuto do arco (e que vai até às seis casas sexagesimais para valores entre  $87^\circ$  e  $90^\circ$ ). Esta tabela só seria superada por Rheticus quase 200 anos mais tarde.

#### Al-Kāshī à luz atual

Al-Kāshī usa um método para aproximar  $\sin(1^\circ)$  que produz um resultado tão próximo do valor real quanto desejado.

O método que ele utiliza é chamado um método iterativo: começamos com conjunto de dados e uma aproximação, que geralmente é grosseira mas está próxima do valor real. De seguida, com o conjunto de dados, o valor inicial e com um determinado procedimento chegamos a um número. Este número é então tomado como a nova aproximação e com o conjunto de dados, usando o mesmo procedimento, realizamos uma segunda ronda de cálculos. Estes cálculos geram uma nova aproximação e com o conjunto de dados é utilizado o procedimento e por aí adiante. Se o procedimento for eficiente irá produzir resultados que se irão aproximar cada vez mais do valor procurado e que resolve o problema. Neste caso, o procedimento converge e o algoritmo é eficiente.

O procedimento de Al-Kāshī produz resultados que sucessivamente se aproximam do valor de  $\sin(1^\circ)$ . O método, hoje em dia, tem o nome de Método de Iteração do Ponto Fixo.

#### Al-Kāshī e o GeoGebra

Al-Kāshī considera a função  $g(x) = \frac{x^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0}$  e faz  $x = g(x)$ . De seguida realiza a iteração tal que  $x_{n+1} = g(x_n)$ .

Propomos-te construir uma folha de cálculo que permitirá obter os vários valores da iteração.

Para isso:

- Começa-se por identificar as três colunas que se irão usar:  $x$  onde estarão os valores de  $x_{n+1}$ ,  $g(x) = \frac{x^3 + 47,6;8,29,53,37,3,45}{45,0}$  (que terá os valores de  $g(x_n)$ ) e  $Erro = \sin(1^\circ) - g(x_n)$ .
- Atribuiu-se a  $x$  o valor 1. Na segunda coluna é calculado o valor de  $g(1)$  e na terceira coluna é dado o valor de  $Erro = \sin(1) - g(1)$ .



- c) Copiar o valor de  $g(1)$  para a primeira coluna, colocando-o abaixo do valor 1. Na segunda coluna é apresentado o valor de  $g(g(1))$  e na terceira coluna o valor de  $Erro = \sin(1) - g(g(1))$ .
- d) A Folha de Cálculo já tem tudo o que é necessário para proceder às iterações. Faz-se correr as fórmulas das células nas três colunas.
- e) Observa os valores obtidos.

A convergência é rápida? Quantas iterações são necessárias para obteres um valor com 13 casas decimais corretas?

A convergência da função  $g(x)$  para  $\sin(1^\circ)$  é rápida.

À 5ª iteração já temos um valor que difere de 13 casas decimais do valor real!

## 7.4. Atividade 4: Pedro Nunes e a Anotação sobre as derradeiras palavras do Capítulo dos Climas

### Saberes mobilizados pelo aluno

- *Apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo.*
- *Reconhecer propriedades da relação de ordem em  $\mathbb{R}$ .*
- *Usar relações entre ângulos ao centro, cordas e arcos.*
- *Usar relações entre ângulos e lados de um triângulo.*
- *Usar proporcionalidade.*
- *Usar critérios de semelhança de triângulos.*
- *Relacionar conceitos da Astronomia com a Matemática.*
- *Aplicar a Matemática na resolução de problema astronómicos.*
- *Utilizar procedimentos demonstrativos.*
- *Desenvolver o raciocínio hipotético dedutivo através da capacidade de argumentação.*
- *Utilizar o GeoGebra 5.0.*
- *Desenvolver o gosto pela pesquisa.*

## Introdução

Ao longo desta atividade pretende-se que o aluno contate com a vida e obra de Pedro Nunes, um matemático português ímpar. O aluno será convidado a dissecar parte da famosa *Annotação sobre as derradeiras palavras do Capitulo dos Climas* usando o GeoGebra 5.0 e demonstrando vários passos da proposição apresentada sobre a largura dos Climas. Por fim, seguindo o caminho do matemático, o aluno poderá ainda aplicar, a um caso prático, o resultado já demonstrado.

## Biografia de Pedro Nunes

### Tratado da Sphera

1. Investiga um pouco acerca da vida do matemático português, Pedro Nunes. Das suas obras pesquisa sobre o conteúdo do Tratado da Sphera.

Pedro Nunes nasceu em Alcácer do Sal, em 1502, embora em algumas fontes se encontre como ano de nascimento 1492. Desde logo aqui começam as dúvidas e incertezas acerca da vida de Pedro Nunes. Em qualquer dos casos, Pedro Nunes nasceu no momento em que Portugal estava no seu máximo esplendor.

Há que referir que Pedro Nunes nasce cerca de uma década depois de três descobrimentos:

- a descoberta da América por Cristóvão Colombo,
- a descoberta do caminho marítimo para a Índia por Vasco da Gama,
- a descoberta das praias de Santa Cruz por Pedro Álvares Cabral.

Por outro lado, no ano em que Pedro Nunes nasceu, Vasco da Gama faz a sua segunda viagem à Índia e passados pouco anos, quando Pedro Nunes estava na sua plena juventude, realizou-se a primeira viagem de circum-navegação.

Pedro Nunes está assim envolto numa atmosfera esplendorosa que terá influenciado o seu caminho percorrido na atividade científica.

Não se sabe nada acerca dos seus ascendentes e irmãos pelo que se conjectura que estes tenham sido israelitas. Contudo é de notar que nada nas suas obras mostra que tenha sido criado num meio de tradições israelitas. Da sua infância e adolescência nada se sabe.

Quanto à sua escolaridade presume-se que tenha aprendido as primeiras letras em Portugal e os estudos universitários tenham sido feitos em Portugal e Espanha mais precisamente em Salamanca. Pedro Nunes estudou em medicina mas não se sabe se fez o bacharelato em Salamanca ou Lisboa. Sabe-se apenas que após o bacharelato concluiu em Lisboa a licenciatura em Lisboa, em 1532, e depois o Doutoramento.

Pedro Nunes ainda teve alguma atividade universitária em Lisboa mas dos documentos apenas se depreende que teria somente ensinado matérias filosóficas.

E 16 de novembro de 1529, com 27 anos, foi nomeado cosmógrafo do reino. Ainda neste ano, pouco tempo depois, a 4 de dezembro, ganha um concurso para a cadeira de Filosofia Moral na Universidade de Lisboa.

Em 1531, por encargo do rei D. João III, começa a ensinar os infantes D. Luís e D. Henrique, o futuro cardeal-rei.

Em 1537 obtém autorização do rei para mandar imprimir todas as obras que tivesse feito. Nesse ano, em dezembro, publica Tratado da Sphera, em língua portuguesa.

Em 1542 publica a que é considerada obra-prima, o De Crepusculis ou Tratado dos Crepúsculos.

Em 1546 publica em Coimbra o De Erratis Orontii Finae.

Pouco tempo depois, a 22 de dezembro de 1547, é nomeado cosmógrafo-mor do reino.

Mais tarde, em 1566, faz uma ampliação do seu Tratado da Sphera em Petri Nonni Salaciensis Opera, que foi apenas publicado em Basileia. Um ano depois, em 1567, publica o Libro de Algebra.

Não consegue cumprir o convite feito pelo papa Gregório XII em 1577 de se pronunciar sobre a possível reforma do calendário juliano, pois acaba por morrer em 1578

### ***O Tratado da Sphera de Pedro Nunes***

As obras de Pedro Nunes são compostas por traduções, comentários e escritos originais.

A obra que estará em destaque nesta atividade é o Tratado da Sphera.

Esta obra foi publicada em português em Lisboa, em 1537, sendo dedicada ao infante D. Luís.

O Tratado da Sphera é constituído por três obras traduzidas do latim e anotadas por Pedro Nunes sendo elas:

- Da Sphera do monge inglês João de Sabroscosco;
- Theorica do Sol e da Lua de Púrbaquio;
- Livro Primeiro de Geographia de Ptolomeu.

A parte mais interessante destas traduções é constituída pelas notas que servem de esclarecimento ao texto. Destas notas tem, para este trabalho, interesse a nota final à tradução do livro de Sacrobosco: a *Anotação sobre as derradeiras palauras do Capitulo dos Climax*. Trata-se da parte mais interessante e valiosa do primeiro trabalho de Pedro Nunes e que adquiriu grande e justificada fama dada a difusão de várias traduções de Élie Vinet que a inclui nas muitas edições que promoveu do Tratado da Sphera. Desta forma, o texto que originalmente tinha sido escrito em português passa a estar acessível ao leitor culto em toda a Europa pela edição em latim. Vinet também foi responsável por introduzir a obra de Pedro Nunes nos circuitos intelectuais de Bordéus que era na altura um dos polos mais ativos das relações intelectuais entre a França e a Península Ibérica. A *Anotação* também ficou bem conhecida entre os matemáticos jesuítas.

Fazem parte ainda deste Tratado duas obras originais de Pedro Nunes:

- Tratado em defesam da carta de marear – neste tratado Pedro Nunes define as condições da construção de mapas, apresenta o processo para determinar a declinação magnética e o processo para

determinação de latitudes baseado nas alturas extra meridianas do Sol. O instrumento de sombras é descrito nesta obra.

- Tratado sobre certas dúvidas de navegação – neste tratado, Pedro Nunes responde a dúvidas colocadas por Martim Afonso de Sousa suscitadas pela sua viagem ao Brasil.

Estes dois textos são excepcionais e assinalam a entrada em cena de um pensador de primeiro nível.

Nesta obra Pedro Nunes ocupa-se das linhas de rumo que vieram a ter grande reflexo na cartografia.

### *Anotação sobre as derradeiras palauras do Capitulo dos Climas*

Como poderás ter observado ao longo da pesquisa feita, a *Anotação sobre as derradeiras palavras do Capitulo dos Climas* de Pedro Nunes foi muito conhecida em toda a Europa, graças difusão trazida pela versão latina de Élie Vinet (1509-1584) que a inclui nas muitas edições do Tratado da Sphera que promoveu. Desta forma, o texto que originalmente tinha sido escrito em português passa a estar acessível ao leitor culto em toda a Europa pela edição em latim. Vinet também foi responsável por introduzir a obra de Pedro Nunes nos circuitos intelectuais de Bordéus que era na altura um dos polos mais ativos das relações intelectuais entre a França e a Península Ibérica. A *Anotação* também ficou bem conhecida entre os matemáticos jesuítas.

O que Pedro Nunes demonstra é:

*A largura dos climas diminui quando eles se aproximam do polo.*

O que se propõe agora é fazer a demonstração desta afirmação.

Ao longo dos trechos que se seguem poderás encontrar alguma linguagem da astronomia. Caso não estejas familiarizado com algum do vocabulário, consulta o anexo ou faz uma breve pesquisa na internet. Desde já se salienta que a compreensão da linguagem da astronomia é essencial para a correta interpretação do trabalho de Pedro Nunes que te propomos!

### *Considerações acerca da Anotação*

No *Tratado da Sphera*, Sacrobosco, na parte relativa aos climas, calcula a largura dos vários climas e, no final, diz que a largura do primeiro clima é maior que a do segundo e que a do segundo clima é maior que a do terceiro, e assim por diante. Como Sacrobosco não escreve mais nada sobre o assunto, à semelhança de todos os outros autores, Pedro Nunes decide demonstrar este resultado:

*“O que este autor nesta parte diz da largura dos climas jr deminuindo/crecêdo a quãtidade dos dias ygualmente de mea em mea hora: dizem todollos outros autores que nesta materia falão: mas nenhũ ho demonstra. E portãto quero fazer disto demonstração: e sera a mais facil que eu poder e sem muita Geometria de linhas curuas”. (Pedro Nunes. Obras, vol. I)*

Na *Anotação sobre as derradeiras palauras do Capitulo dos Climas* encontramos, pela primeira vez, uma demonstração matemática rigorosa de que a “largura” dos climas decresce à medida que se avança do equador para o polo. Por outro lado, esta anotação “tipifica de maneira exemplar a personalidade matemática de Pedro Nunes” (Leitão e Almeida, 2012) dado que Pedro Nunes considera que só se deveriam usar resultados que estivessem matematicamente demonstrados.

A *Anotação* está dividida em cinco partes:

- primeira parte: demonstração matemática de uma proposição auxiliar;
- segunda parte: a demonstração do resultado referido;
- terceira parte: um exemplo prático;
- quarta parte: um método para determinar a duração do dia em qualquer dia do ano;
- quinta parte: descrição de um “estromêto”.

É de notar que Élie Vinet só inseriu nas suas edições latinas a demonstração pelo resultado, que só ela foi difundida.

Nesta investigação irás contatar com as três primeiras partes da *Anotação*. Desde já ficas convidado a ler um pouco sobre as últimas partes da *Anotação* e que aqui não são desenvolvidas.

#### Primeira parte da *Anotação*: a demonstração de um resultado auxiliar

Pedro Nunes começa por demonstrar um resultado auxiliar usando a seguinte construção:

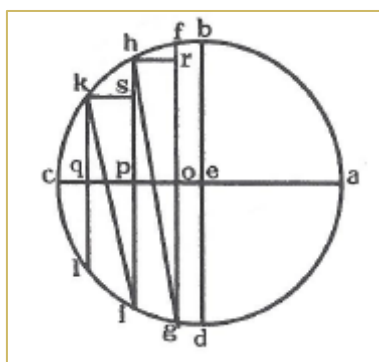


Figura 1 – Pedro Nunes: demonstração de um resultado auxiliar

No círculo  $abcd$ , começa-se por traçar dois diâmetros que no centro fazem dois ângulos retos, ficando o círculo dividido em quartos de círculo; em dois quartos de círculo  $bc$  e  $dc$  tomamos arcos iguais começando de  $b$  e de  $d$  como sejam  $bf$  e  $dg$ ,  $fh$  e  $gi$ ,  $hk$  e  $il$ ; unimos  $f$ ,  $h$ ,  $k$  com os seus correspondentes  $g$ ,  $i$ ,  $l$ , obtendo no semidiâmetro  $ec$  os pontos  $o$ ,  $p$ ,  $q$  respetivamente.

O resultado auxiliar a demonstrar é:

*Se a linha  $pq$ , que está mais afastada do centro que  $op$ , for maior que  $op$ , o arco  $hk$  é maior que o arco  $fh$  e, analogamente, se  $op$  for maior que  $eo$ , o arco  $fh$  será maior que o arco  $bf$ .*

*Ou seja: Se um segmento mais afastado do centro da circunferência for maior que um segmento mais próximo do centro da circunferência, então o arco correspondente ao primeiro segmento é maior que o arco correspondente ao segundo arco.*

Passamos à demonstração deste resultado auxiliar. Trata-se de uma demonstração por redução ao absurdo.

1. Consideremos que  $pq > op$ . Mostremos que  $\text{arc } hk \neq \text{arc } fh$ .
  - a) Traçam-se as perpendiculares  $hr$  e  $ks$  a partir de  $h$  e  $k$  sobre  $fg$  e  $hi$  e unem-se  $h$  a  $g$  e  $k$  a  $i$ . Considere-se que  $\text{arc } fh = \text{arc } hk$ . Explica porque é que os triângulos  $hgr$  e  $kis$  são semelhantes.

Obtemos dois triângulos  $hgr$  e  $kis$ , que são retângulos.

Como a arcos iguais correspondem ângulos iguais, então os ângulos  $rg h$  e  $sik$  são iguais. Os outros ângulos  $rhg$  e  $ski$  também são iguais. Assim pelo critério AA os triângulos  $hgr$  e  $kis$  são semelhantes.

- b) Em triângulos equiângulos, os lados que contêm ângulos iguais são proporcionais. Assim  $\frac{rg}{si} = \frac{rh}{sk}$ . Justifica que  $op > pq$ .

Como  $rg > si$  então  $rh > sk$  e consequentemente  $op > pq$  (pois  $rh = op$  e  $sk = pq$ ).

- c) Justifica que se chegou a uma contradição.

Chegamos a uma contradição pois se  $op > pq$  então  $arc fh \neq arc hk$ , o que contradiz a hipótese inicial.

2. Não se pode dizer que  $arc hk$  é menor que  $arc fh$ .

Começa-se por considerar que  $arc hk < arc fh$ . Acrescenta-se a  $k$  uma porção de arco,  $kk'$ , de forma que  $arc hk' = arc fh$ . Traça-se um segmento de reta unindo o extremo deste arco ao seu correspondente no quarto de círculo  $dc$ .

- a) Justifica que o segmento traçado no semidiâmetro  $ec$  é maior que  $pq$ .

Porque  $pq$  é uma parte desse segmento.

- b) Recorrendo à mesma demonstração que foi usada anteriormente, o que se conclui?

Concluimos que  $pq' < op$ .

- c) Justifica que se chegou a uma contradição.

Chegamos a uma contradição porque se  $op > pq'$  então  $arc fh \neq arc hk'$ .

Nota: para facilitar a leitura usamos os pontos  $k'$  e  $q'$  mas estes não constam do texto original.

3. Completa: Assim nem  $arc hk$  é menor que  $arc fh$  nem é igual, donde resulta que é \_\_\_\_\_.

4. Considere-se que  $pq = op$ .

Se considerarmos que  $pq = op$ , como Pedro Nunes diz, “pela mesma arte”, ou seja da mesma forma, demonstramos que  $arc hk > arc fh$ .

Seguindo a metodologia da demonstração anterior, conclui que  $arc hk > arc fh$ .

Sugestão: Começa por mostrar que  $arc hk \neq arc fh$ . De seguida mostra que  $arc hk$  não é menor que  $arc fh$ . Por fim, conclui o resultado.

- a) A mostrar que  $arc hk \neq arc fh$

Usando o mesmo diagrama, considere-se que  $arc fh = arc hk$ . Se  $arc fh = arc hk$ , como a arcos iguais correspondem ângulos iguais, então os ângulos  $rg h$  e  $sik$  são iguais. Os outros ângulos  $rhg$  e  $ski$  também são iguais. Assim pelo critério AA os triângulos  $hgr$  e  $kis$  são semelhantes. Nos triângulos equiângulos, os lados que contêm ângulos iguais são proporcionais. Assim  $\frac{rg}{si} = \frac{rh}{sk}$ . Como  $rg > si$  então  $rh > sk$  e consequentemente  $op > pq$  (pois  $rh = op$  e  $sk = pq$ ). Chegamos a uma contradição pois  $op = pq$  e então  $arc fh \neq arc hk$ , o que contradiz a hipótese inicial.

b) Não se pode dizer que  $\text{arc } hk$  é menor que  $\text{arc } fh$ .

Começamos por considerar que  $\text{arc } hk < \text{arc } fh$ . Acrescentemos a  $k$  uma porção de arco,  $kk'$ , de forma que  $\text{arc } hk' = \text{arc } fh$ . Tracemos um segmento de reta unindo o extremo deste arco ao seu correspondente no quarto de círculo  $dc$ .

Esse segmento traçado no semidiâmetro  $ec$ , é maior que  $pq$  porque  $pq$  é uma parte desse segmento.

Usando a mesma demonstração a que recorremos anteriormente concluímos que  $pq' < op$ . Chegamos a uma contradição porque se  $op > pq'$  então  $\text{arc } fh \neq \text{arc } hk'$ .

c) Assim nem  $hk$  é menor que  $fh$  nem é igual, donde resulta que é maior.

#### Construção do esquema tridimensional de Pedro Nunes, usando o GeoGebra 5.0

Pedro Nunes apresenta a figura que se encontra abaixo.

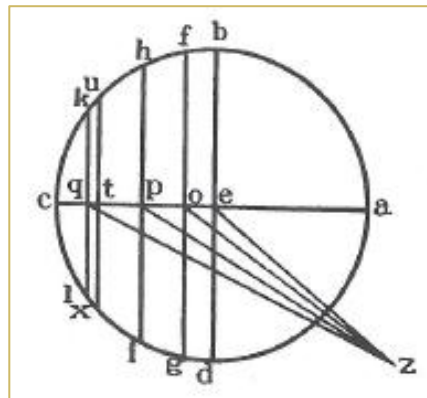


Figura 2 – Pedro Nunes. Obras, vol. I: demonstração do resultado da largura

Nesta figura:

- ✓ o círculo  $abcd$  representa um paralelo qualquer no hemisfério Norte;
- ✓ o meridiano e o horizonte reto intersectam-se no centro deste círculo em ângulos retos de tal forma que o círculo fica dividido em quatro quartos de círculo sendo  $ac$  a intersecção do meridiano com o círculo  $abcd$  e o diâmetro  $bd$  a intersecção do horizonte com o círculo  $abcd$ ;
- ✓ o ponto  $z$  representa o centro da esfera celeste;
- ✓  $zo$  é a intersecção entre o horizonte oblíquo que passa pelo ponto  $o$  e o círculo correspondente ao meridiano de lugar que corta os pontos  $c$  e  $a$ ;
- ✓  $fog$  é a intersecção entre o horizonte oblíquo e  $abcd$ ;
- ✓ o ângulo  $ezo$  é a altura do polo (que corresponde à *latitude astronómica do observador*).

Imaginem-se mais dois horizontes oblíquos, correspondentes a observadores em latitudes mais elevadas em que:

- a intersecção entre o horizonte e o meridiano de lugar passa pelos pontos  $p$  e  $q$  de forma a que os ângulos  $ezo$ ,  $ozp$  e  $pzq$  sejam iguais e a sua soma seja igual a  $ezq$ , que é a latitude astronómica do terceiro horizonte.

- $ezp$  é a latitude astronómica do segundo horizonte
  - os arcos  $bf$ ,  $fh$  e  $hk$  (e os correspondentes  $dg$ ,  $gi$  e  $il$ ) representam porções de arco diurno do Sol. Estes segmentos de arco podem ser tomados como quantidades de tempo e pela definição de clima o seu valor é de meia hora.
- De seguida, apresenta-se um guião onde são dados alguns passos que permitem obter a mesma construção, mas em 3D:
- abrir o GeoGebra 5.0;
  - no *Menu Vista* seleccionar *Folha Gráfica 3D*;
  - construir uma esfera de um raio qualquer, usando as ferramentas disponíveis. O centro desta esfera é  $z$ ;
  - construir três paralelos com distâncias iguais entre si com  $z > 0$  (começar por construir três planos com distâncias iguais entre si e a partir deles obter os paralelos);
  - obter dois círculos máximos perpendiculares entre si e perpendiculares aos três paralelos construídos: por exemplo um desses círculos pode estar no plano  $y = 0$  e o outro círculo no plano  $x = 0$ . Um dos círculos máximos é meridiano de lugar e o outro círculo é o horizonte reto;
  - no paralelo com menor valor de  $z$  identificam-se os pontos  $a, b, c, d$ ;
  - os pontos de interseção entre o paralelo e o meridiano de lugar são  $a$  e  $c$  e os pontos de interseção entre o paralelo e o horizonte reto são os pontos  $b$  e  $d$ ;
  - desenhar os segmentos  $ac$  e  $bd$ ;
  - considerar que o ponto de interseção do círculo  $abcd$  com o eixo  $Oz$  é  $e$ ;
  - no segmento  $ce$  considerar um ponto qualquer  $o$ ;
  - desenhar o círculo máximo que passa por  $o, z, b$  e  $d$  – este será o horizonte correspondente ao primeiro paralelo;
  - traçar um segmento paralelo a  $bd$  que passe por  $o$ , obtendo-se  $gf$ ;
  - os dois horizontes em falta terão de ser obtidos de forma que os ângulos  $ezo$ ,  $ozp$  e  $pzq$  sejam iguais e que a sua soma seja igual a  $ezq$ , que é a latitude do terceiro horizonte. Sugere-se o uso da *Ferramenta Reflexão* para triplicar o ângulo inicial.

#### Segunda parte da *Anotação*: a demonstração do resultado sobre a largura dos Climas

Pedro Nunes irá analisar a duração dos dias mais longos, ao longo do ano, para três latitudes igualmente separadas.

Caso não tenhas conseguido obter a figura tridimensional no ponto anterior, tens abaixo uma possível representação.



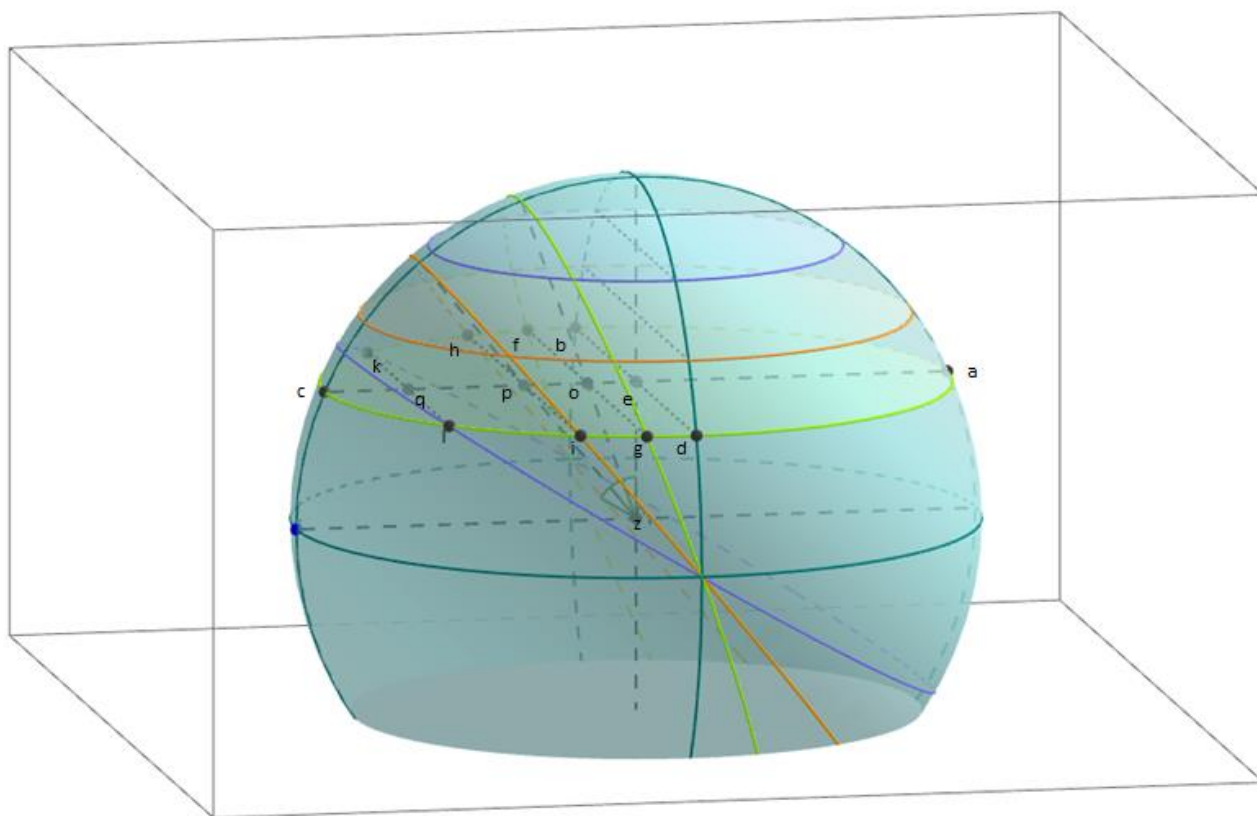


Figura 3 – Proposição da largura dos Climas: esquema tridimensional

Pedro Nunes pretende demonstrar que a *largura dos climas* – distância entre os paralelos - é sucessivamente menor à medida que aumenta a altura do polo.

Vejamos como o faz:

- a) Consideremos o triângulo  $oqz$ . Neste triângulo ângulo  $ozq$  é bisetado pelo segmento  $zp$ . Justifica que  $zq > zo$ .

$zq$  está em frente ao ângulo  $zoq$  que é obtuso e  $zo$  está em frente ao ângulo  $zqo$  que é agudo.

- b) Aplica a proposição *Elementos*, VI, 3 (Se um ângulo é bisetado por uma linha reta que intersesta a base, então os segmentos da base têm a mesma razão que os lados restantes do triângulo) ao triângulo  $ozp$ .

$$\text{Obtém-se: } \frac{zp}{zo} = \frac{pq}{op}.$$

- c) Completa: como  $zq \_ zo$ , também  $pq \_ op$ .
- d) Usa a proposição auxiliar, que antes Pedro Nunes havia demonstrado, para completar a afirmação:  $\text{arc } hk > \text{arc } fh$  e, assim,  $\text{arc } il \_ \text{arc } gi$ .
- e) Explica qual a razão de não se poder ter  $\text{arc } hk > \text{arc } fh$ , tendo em conta a definição de clima.

Por construção e pela definição de clima,  $\text{arc } hk = \text{arc } fh$ . Ou seja, nas condições desta demonstração, i.e. para paralelos separados por valores iguais, a diferença entre os seus dias mais longos não seria de meia hora; não seriam portanto climas.

- f) Pedro Nunes vai considerar um novo segmento de *arco hu* (e seu correspondente *ix*) menor que *hk*. O segmento *ux* é a interseção do horizonte e do paralelo; a interseção de *ux* com o meridiano de lugar dá-se num ponto *t*. Este ponto *t*, mais próximo do ponto *p*, está localizado entre as linhas *kl* e *hi*, de modo a que o  $\text{arc } hu = \text{arc } fh$ .

O que resulta daqui no que respeita à diferença entre os paralelos, ou seja no que respeita à largura dos climas?

Desta forma, a diferença entre paralelos terá de ser menor para que os dias mais longos correspondentes difiram exatamente meia hora. Ou seja, a *largura dos climas – distância entre os paralelos – é sucessivamente menor à medida que se aumenta a altura do polo*, tal como Nunes pretendia demonstrar.

### Terceira parte da Anotação: um exemplo numérico

Seguidamente, Pedro Nunes apresentou um exemplo numérico para o cálculo do *arco dg*.

É nesta parte que se encontram as referências à linguagem trigonométrica.

- ❶ Pedro Nunes começa por se referir ao triângulo retângulo *zoe*:

“o triângulo *z. o. e* tem ho ângulo *.oez.* direito: e o ângulo *.e. z. o.* contém os graus de altura do polo: e portanto ho terceiro ângulo que he *.e. o. z.* valera ho que fica para .90 que é a altura da equinocial: e poys ho lado *.e. z.* he conhecido porque he igual ao sino da declinação do paralelo *a. b. c. d*”.

Traduzindo em linguagem atual:

✓  $eo z = 90^\circ$  –  $ezo$  (o ângulo *oez* é igual a  $90^\circ$ );

✓ *ez* é o seno da declinação  $\delta$  do paralelo correspondente ao círculo *abcd*.

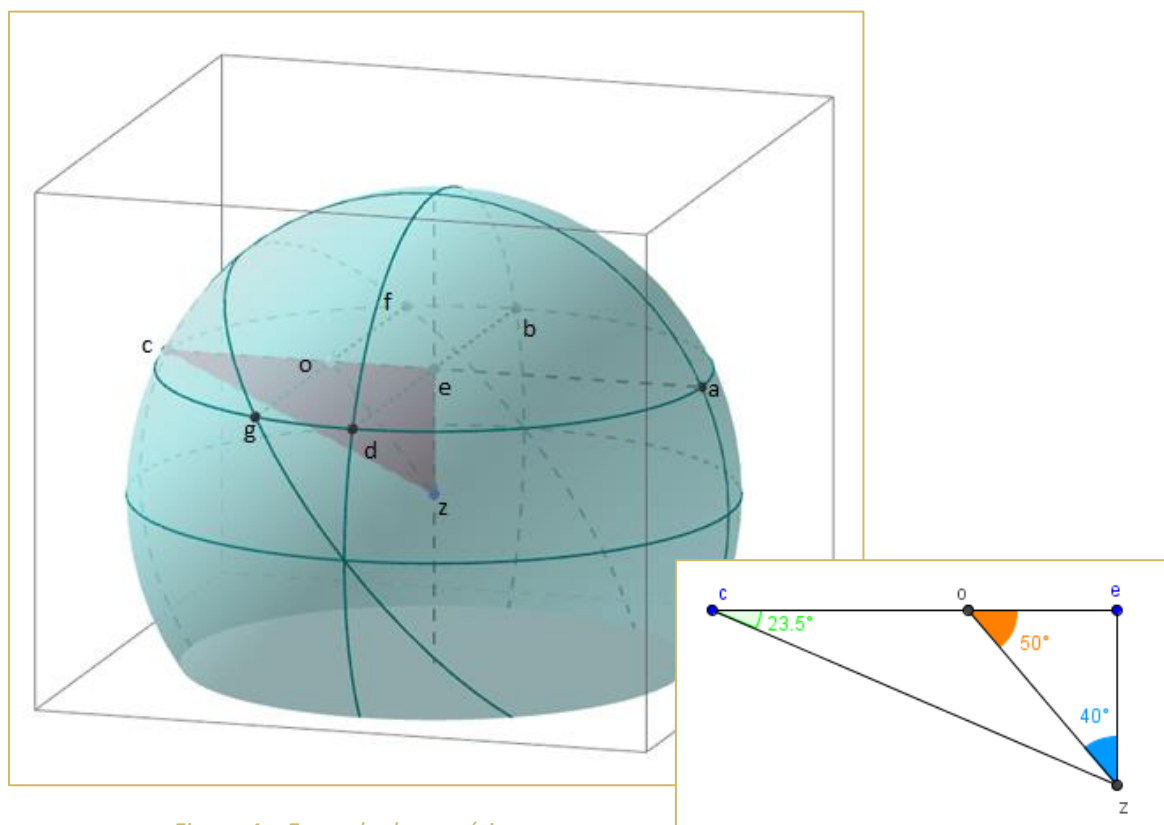


Figura 4 – Exemplo de numérico:  
esquema tridimensional

2 De seguida Pedro Nunes dá a regra para determinar  $eo$ :

“a regra sera multiplicar ho sino do ângulo  $.e.z.o.$  per  $.e.z.e$  e partir per o sino do angulo  $.e.o.z.$  e vira na partiçam a linha  $e.o.$  pois a proporção dos Sinos dos arcos que valem os ângulos he a dos lados que estam defronte deles.”

Ou seja, usando a Lei dos senos:

$$\frac{eo}{ez} = \frac{\sin(ezo)}{\sin(eoz)} \Leftrightarrow eo = \frac{\sin(ezo) \cdot ez}{\sin(eoz)}.$$

3 Pedro Nunes usa uma tabela de senos em que  $r = 100\,000$ .

4 Terão de ser determinados  $eo = (gd)$  e  $ec (= ed)$  para  $\sin dg = \frac{eo}{ec}$  ser conhecido.

5 Para obter o arco semidiurno máximo, soma-se o valor do *arco dg* (em unidades de tempo) com 6 horas.

Propomos-te que, à semelhança de Pedro Nunes, apliques o procedimento descrito para a cidade de Lisboa no dia mais longo do ano.

Para facilitar os cálculos considera que a altura do polo de Lisboa (ou seja a sua Latitude) é  $\varphi = 40^\circ$ .

Nota: poderá ser usada uma tabela de senos atual ou a tabela de Apianus onde  $r = 100\,000$ .

A resolução que se segue é a de Pedro Nunes.

Seguindo o procedimento já descrito para  $\varphi = 40^\circ$ :

$$- \sin(eoz) = \sin(90^\circ - \varphi) = \sin(90^\circ - 40^\circ) = \sin 50^\circ = 76604;$$

$$- \sin(ezo) = \sin \varphi = \sin 40^\circ = 64278;$$

$$- ez = \sin \delta = \sin 23,5^\circ = 39874;$$

Substituindo em  $eo = \frac{\sin(ezo) \cdot ez}{\sin(eoz)}$  vem:

$$eo = \frac{64278 \cdot 39874}{76604} = 33458.$$

Pedro Nunes apresenta como resultado 33457.

Como:

$$ec = \sin(90^\circ - \delta) = \sin(90^\circ - 23,5^\circ) = \sin 66,5^\circ = 91706,$$

Agora vem:

$$\sin(dg) = \frac{eo}{ec} = \frac{33457}{91706} \Leftrightarrow dg = \sin^{-1}\left(\frac{eo}{ec}\right) = 21^\circ 24' = 1^h 25' 36''.$$

Assim o valor do arco semidiurno é  $6^h + 1^h 25' 36'' = 7^h 25' 36'' \sim 7^h 26'$  e o arco diurno é obtido duplicando o valor obtido é igual a  $14^h 52'$ .

### Latitude Geográfica e Astronómica

Pedro Nunes no Tratado da Sphera refere-se a “graus de altura do polo”. Trata-se da latitude astronómica do observador.

A latitude astronómica de um observador é a distância angular entre o horizonte do observador e o Polo Norte.

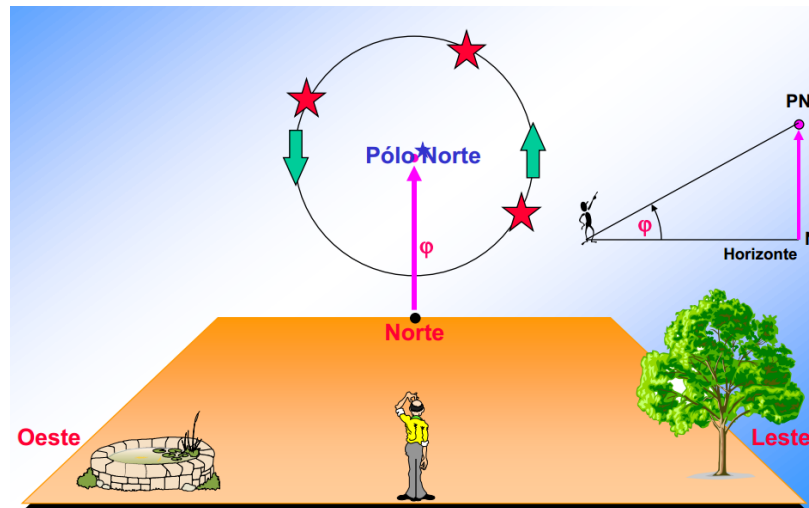


Figura 5 – Latitude Astronómica e o horizonte

A latitude geográfica de um observador é a distância angular entre o equador, medida em graus, minutos e segundos, e o paralelo em que se encontra o observador, podendo variar entre 0° e 90° para Norte ou para Sul. Por exemplo, Lisboa está à latitude de 38° 4' Norte.

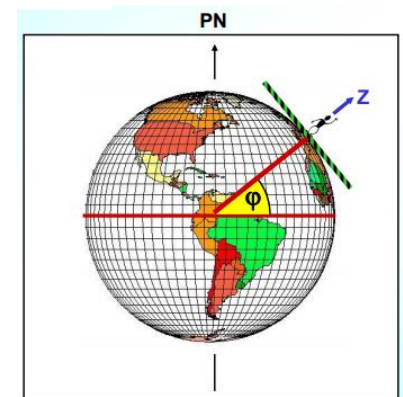


Figura 6 – Latitude Geográfica

As latitudes astronómicas e geográficas são iguais, como vemos na figura seguinte.

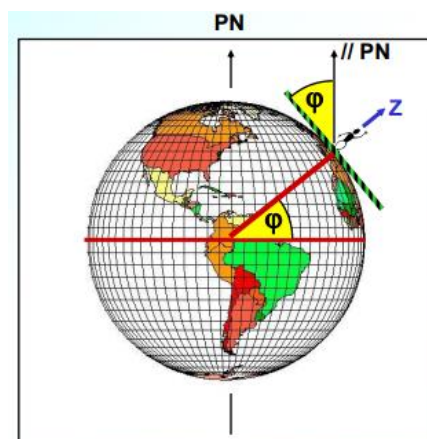


Figura 7 – Latitude Astronómica e Geográfica

### Declinação do Sol

O ângulo formado entre as linhas imaginárias do Equador e a que liga o centro da Terra ao Sol denomina-se Declinação Solar ( $\delta$ ).  $\delta$  indica a latitude na qual o Sol “está a passar” num determinado instante no seu movimento aparente *N-S*.

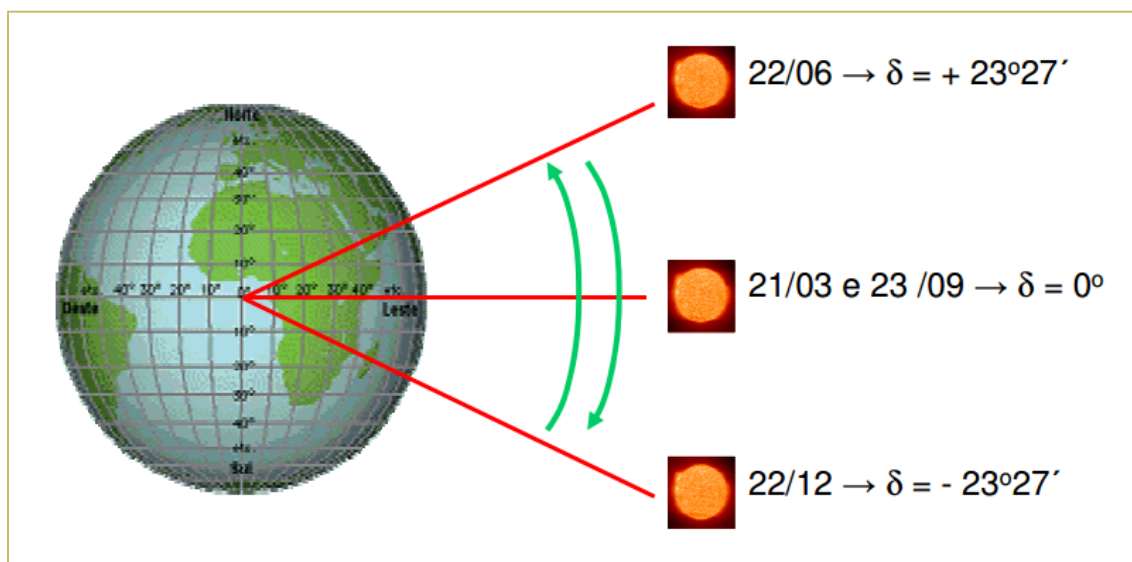


Figura 8 – Declinação do Sol

### Mais vocabulário da Anotação

Recorrendo à *Astronomici Introductorii de Spaera Epitome*, dá-se conta, de seguida, de algum do vocabulário que é utilizado ao longo da *Anotação* e que poderá facilitar o acompanhamento da mesma.

- Acerca dos círculos da esfera:

Dos círculos da esfera uns são maiores e outros menores.

Círculo maior é aquele que divide a esfera em partes iguais. Os círculos maiores são seis: o equador ou equinocial, o zodíaco, dois coluros, o meridiano e o horizonte.

Círculo menor é o que corta a esfera desigualmente. Os círculos menores são quatro: o círculo ártico, círculo de Câncer, círculo de Capricórnio e círculo antártico.

- Acerca do zodíaco:

Consta de três círculos equidistantes, sendo que os dois das extremidades delimitam a largura do zodíaco. O círculo do meio é a eclíptica e corta o equador em dois pontos opostos. A longitude

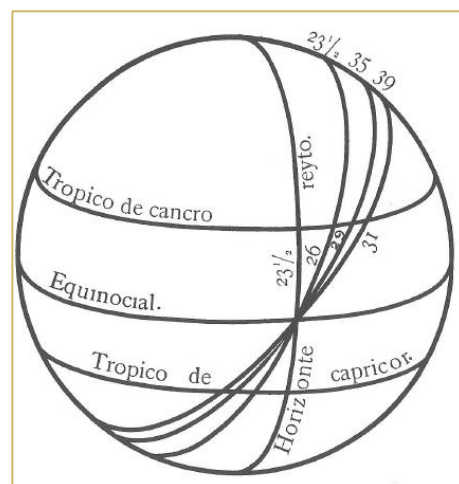


Figura 9 – Pedro Nunes. Obras, vol. I: círculos maiores e menores, horizontes retos e oblíquos

do zodíaco divide-se em 12 partes iguais, que se designam signos. Cada signo divide-se em 30 partes ou graus.

- Acerca do meridiano:

É um círculo que se traça pelos polos e por um ponto na vertical da nossa cabeça.

- Acerca do horizonte:

É o círculo maior que separa a parte visível da que não se vê. O horizonte reto passa pelos polos, cortando o equador em ângulos retos e é o dos homens que se encontram no próprio equador. O horizonte oblíquo não passa pelos polos e é o dos homens que habitam aquém e além do equador.

- Acerca dos quatro círculos menores e das cinco zonas:

O círculo de Câncer é um círculo menor onde se dá o dia mais longo e a noite mais breve do ano inteiro.

O círculo de Capricórnio é um círculo menor onde se verifica noite mais longa e o dia mais curto do ano inteiro

Os quatro círculos, Câncer, Capricórnio, Ártico e Antártico são equidistantes. A superfície do céu reparte-se por estes círculos em 5 zonas, as quais correspondem, na mesma quantidade no globo terreno. A zona que nós habitamos é a que se situa entre o trópico de Câncer e o círculo ártico.

- Acerca da divisão do dia natural:

O dia natural divide-se em dia e noites artificiais.

O dia artificial é o tempo de demora do Sol acima do horizonte.

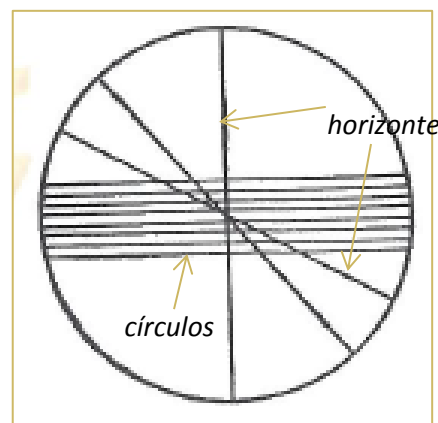
A noite artificial é o tempo de demora do Sol abaixo o horizonte.

A duração dos dias e noites artificiais representa-se-nos mediante as grandezas dos arcos dos círculos dos dias naturais que são deixados no hemisfério superior e inferior pela variação da secção do horizonte.

O horizonte reto, que vem dos polos, corta estes círculos em partes iguais. Assim os arcos deixados acima e abaixo do horizonte são iguais pelo que os dias têm a mesma duração das noites.

Na esfera oblíqua, o horizonte corta desigualmente todos os círculos dos dias naturais, exceto o equador, deixando os arcos maiores acima do horizonte quando o Sol se afasta para o polo visível. Por esse motivo quando o sol avança pelo semicírculo boreal do zodíaco, os dias são maiores que as noites e tanto maiores quanto mais uma região se afasta do equador.

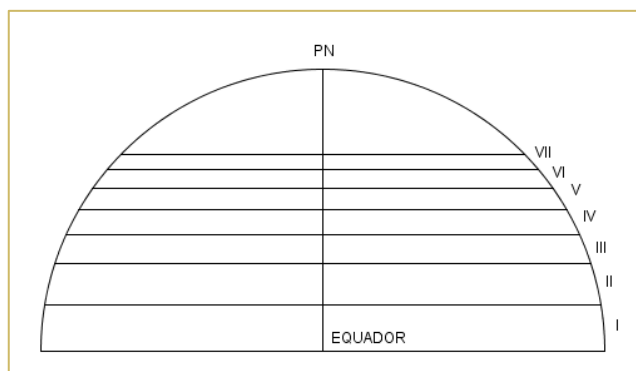
Se o Sol se afasta para o polo oculto, os arcos acima do horizonte são menores que abaixo do horizonte.



*Figura 10 – Pedro Nunes. Obras, vol. I: horizonte e círculos*

- Daquilo que sucede nas diferentes habitações, isto é os Climas:

Pedro Nunes usa o conceito de Clima que era vulgar na época: um “clima é uma certa zona ou região terrestre intercetada por dois paralelos ao equador, ao longo da qual a grandeza dos dias varia mas com diferença sensível”. Pedro Nunes considera, seguindo a tradição helénica, que o hemisfério norte está dividido em sete climas.



*Figura 11 – Os sete Climas*

Pedro Nunes apresenta uma tabela onde podemos encontrar os sete climas que vemos abaixo. Os climas estão relacionados com uma cidade e que é o lugar onde há o cruzamento com o meridiano de Alexandria. Na tabela, estão registadas as durações do maior dia do ano em cada uma dessas cidades e a latitude do clima. Verificamos que, de clima para clima, há uma variação de meia hora na duração do maior dia do ano.

|                                  |           | Duração do maior dia |    | Latitude do clima |    |
|----------------------------------|-----------|----------------------|----|-------------------|----|
|                                  |           | ho.                  | m. | gr.               | m. |
| Primeiro clima por Méroe         | princípio | 12                   | 45 | 12                | 45 |
|                                  | meio      | 13                   | 0  | 16                | 40 |
|                                  | fim       | 13                   | 15 | 20                | 30 |
| Segundo clima por Siene          | princípio | 13                   | 15 | 20                | 30 |
|                                  | meio      | 13                   | 30 | 24                | 15 |
|                                  | fim       | 13                   | 45 | 27                | 30 |
| Terceiro clima por Alexandria    | princípio | 13                   | 45 | 27                | 30 |
|                                  | meio      | 14                   | 0  | 30                | 45 |
|                                  | fim       | 14                   | 15 | 33                | 40 |
| Quarto clima por Rodes           | princípio | 14                   | 15 | 33                | 40 |
|                                  | meio      | 14                   | 30 | 36                | 24 |
|                                  | fim       | 14                   | 45 | 39                | 0  |
| Quinto clima por Roma            | princípio | 14                   | 45 | 39                | 0  |
|                                  | meio      | 15                   | 0  | 41                | 20 |
|                                  | fim       | 15                   | 15 | 43                | 30 |
| Sexto clima por Boristenes       | princípio | 15                   | 15 | 43                | 30 |
|                                  | meio      | 15                   | 30 | 45                | 24 |
|                                  | fim       | 15                   | 45 | 47                | 15 |
| Sétimo clima pelos Montes Rifeus | princípio | 15                   | 45 | 47                | 15 |
|                                  | meio      | 16                   | 0  | 48                | 40 |
|                                  | fim       | 16                   | 15 | 50                | 10 |

*Figura 12 – Pedro Nunes. Obras, vol. I: Tabela de Climas*

# CONCLUSÃO

Neste último ponto da dissertação, cabe-nos apontar os aspetos que remetem para as principais conclusões decorrentes do trabalho efetuado.

Esta investigação partiu de dois objetivos: aprofundar o conhecimento científico sobre a história da Trigonometria e desenvolver, ou levar a desenvolver, tarefas que motivem os alunos relativamente a esta temática e que desenvolvam simultaneamente competências de pesquisa, investigação e demonstração.

A ideia para este trabalho surgiu da necessidade de dar a conhecer alguns tópicos da história da Trigonometria plana aos professores dos Ensinos Básico e Secundário, dado existirem poucos recursos disponíveis e acessíveis em português sobre o assunto.

Partindo dos objetivos determinados para este estudo, efetuamos uma recolha bibliográfica e uma análise documental para revisão do estado de arte e, assim, determinar a linha orientadora desta dissertação.

Recorreu-se a várias Bibliotecas como a da Universidade de Aveiro, a da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e às duas Bibliotecas Municipais do Porto. Para além disso, fazendo parte do nosso objeto de estudo o matemático português Pedro Nunes, pareceu-nos conveniente, complementarmente, realizar contatos com profissionais que têm interesse investido nesse domínio, nomeadamente o Comandante Jorge Semedo de Matos, da Escola Naval e o Oficial de Armada Portuguesa, José Manuel Malhão Pereira, do Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia. Contactou-se por correio eletrónico a Academia da Marinha tendo sido enviado, do Arquivo Histórico e da Biblioteca, um conjunto de documentos sobre instrumentos náuticos. O contato direto com o Oficial da Armada Portuguesa, José Manuel Malhão Pereira, resultou de um encaminhamento do Comandante Beça Gil, Secretário-geral da Academia de Marinha, a quem muito agradecemos.

O acesso a documentos via Web forneceu um conjunto de informação que de outra forma seria difícil de ser obtida, em especial no que respeita ao desenvolvimento da Trigonometria na Índia e no Império Árabe. No que respeita à Trigonometria na Índia, encontram-se vários documentos disponíveis e com uma visão global do assunto. Relativamente à Trigonometria no Império Árabe os assuntos encontraram-se mais compartimentados e menos acessíveis, sendo necessária a inscrição em bibliotecas digitais ou recorrer a empréstimos interbibliotecas. Foi com muito agrado que verificamos que muitos dos documento originais que necessitamos se encontram integralmente digitalizados.

Paralelamente ao processo de recolha de informação e respetiva sistematização, houve necessidade de fazer uma pesquisa exploratória sobre tópicos de Astronomia e de Náutica que fundamentou o nosso constructo.

Decorrente destes procedimentos, e partindo da metáfora do Homem como descobridor nato, chegámos ao fim da nossa viagem. Viajamos pelo mundo procurando a nossa herança matemática relativamente à Trigonometria plana.



Como vimos, nestas sociedades não faltou curiosidade, experimentação, persistência e inteligência.

São estas capacidades que se pretendem desenvolver com as quatro atividades propostas para a sala de aula.

Sendo a Trigonometria um conteúdo constante dos Programas de Matemática dos Ensinos Básico e Secundário, importa considerar dois aspetos: por um lado, conhecer o interesse da Trigonometria nas aplicações práticas em diferentes domínios ao longo da História e, por outro, desenvolver práticas nas quais os alunos possam sentir-se motivados para a aprendizagem.

Tentámos que esta dissertação constituísse uma ferramenta de trabalho, dando uma contribuição para este domínio do conhecimento e que constituísse uma base para investigações futuras.

De um modo geral, podemos refletir que falta fazer um processo de validação das tarefas propostas para a sala de aula, que por contingência de tempo não nos foi possível realizar.

No que respeita à extensão desta história, consideramos que o fato de não a abrangermos em toda a sua plenitude, pode constituir outra limitação deste estudo.

Para lá de todas as limitações e críticas relativamente às contribuições deste estudo, parece-nos que os horizontes que se abrem são suficientemente interessantes para nos convidar a novos desafios. Neste sentido gostaríamos de avançar o conhecimento neste domínio.

No que respeita ao desenvolvimento da trigonometria esférica, parece-nos relevante fazer uma atualização do assunto que caiu em desuso no Ensino da Matemática. A obra de Menelau constitui um instrumento pedagógico-científico de relevo nesta temática.

Numa outra dimensão, seria interessante estudar a evolução da Trigonometria em Portugal, antes e após Pedro Nunes: haverá algum registo trigonométrico antes de Pedro Nunes? Que outros matemáticos, dentro e fora de Portugal, na mesma altura trabalharam sobre assuntos similares? Como se desenvolveu a trigonometria e o seu ensino após Pedro Nunes? Que influências deixou Pedro Nunes na Europa? Quais os contributos de Pedro Nunes para a Náutica?

Por fim, seria importante analisar as consequências que trouxe o desenvolvimento de outras áreas matemáticas, nomeadamente o cálculo, para o desenvolvimento da Trigonometria e vice-versa.

Certamente os matemáticos que deram forma à Trigonometria e que inspiraram esta dissertação, são, citando Bernard Shaw:

***“[Os matemáticos] são fascinados pela beleza maravilhosa das formas que constroem, e na sua beleza descobrem as verdades eternas.”.***

# BIBLIOGRAFIA

- Aaboe, A. Al-Kāshī's iteration method for determination of  $\sin 1^\circ$ . *Scripta Mathematica* 20 (1954), 24-29.
- Aaboe, A. *Episodes from the early history of mathematics*. The Mathematical Association of America, Washington D.C., 1964.
- Berggren, J. *Episodes in the mathematics of medieval Islam*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- Boyer, C. *História da matemática*. Tradução: Elza Gomide. Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1996.
- Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations (two volumes bound as one)*. Dover Publications, New York, 1993.
- Datta, B. & Singh, A. Hindu Trigonometry, revised by Kripa Shankar Shukl. *Indian Journal of History of Science*, 18, 1 (1983), 39-108.
- Estrada, M. , Sá, C., Queiró, J., Silva, M. e Costa, M. J. *História da Matemática*. Universidade Aberta, Lisboa, 2000.
- Eves, H. *Great moments in mathematics (before 1650)*. Mathematical Association of America, Washington D.C., 1983.
- Eves, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Editora Unicamp, Campinas, 1997.
- Gupta, R. Bhāskara I's approximation to sine. *Indian Journal of History of Science*, 2, 2, (1967), 121-136.
- Gupta, R. Early Indians on Second Order Sine Differences. *Indian Journal of History of Science*, 7 2 (1972), 81-86.
- Joseph, G. *The crest of the peacock: non-european roots of mathematics*. Penguin Books, London, 1991.
- Joseph, G. *A passage to infinity: medieval indian mathematics from Kerala and its impact*. Sage Publications (India) Pvt. Ltd, Delhi, 2009.
- Júnior, M. (1888-1968) Notas. In Nunes, P. *Obras de Pedro Nunes, De Crepusculis*. Academia das Ciências de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2003.
- Katz, V. *História da Matemática*. Tradução Jorge Nuno Silva. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2010.
- Kennedy, E. & Yusuf 'Id A Letter of Al-Bīrūnī, Habash Al-Hasib's Analemma for the Quibla. *Historia Mathematica* 1, 1 (1974), 3-11.

King, D. & Lorch, R. Quibla charts, quibla Maps and related instruments. In J. B. Harley & D. Woodward (Eds), *The History of Cartography, Volume 2, Book 1: Cartography in the Traditional Islamic and South Asian Societies* (pp. 189-205). University of Chicago Press, Chicago, 1992.

King, D. *World maps for finding the direction and distance to Mecca: innovation and tradition on Islamic science*. al-Furqân Islamic Heritage Foundation, London and Brill, Leidei, 1999.

King, D. A Vetustissimus Arabic Treatise on the Quandrants Vetus. *Journal for the History of Astronomy*, 33 (2002), 237-255.

Leitão, H. Sobre as “obras perdidas” de Pedro Nunes. In H. Leitão e L. A. Martins (Coords.), *Pedro Nunes, 1502-1578: Novas terras, novos mares e o que mais he: novo ceo e novas estrelas* (pp. 45-66). Biblioteca Nacional, Lisboa, 2002.

Lourenço, A. e Espinho, M. Pedro Nunes e o cálculo da duração do Crepúsculo. *Pedro Nunes – Novos Saberes na Rota do Futuro. Actas do Colóquio Jornadas do Mar* (pp.79-82). Escola Naval, Alfeite, 2002.

Pereira, J. Métodos e Instrumentos de Navegação, in *Navios Marinheiros e Arte de Navegar, 1500-1668*. Academia da Marinha, Lisboa, 2012.

Maor, E. *Trigonometric Delights*. Princeton University Press, Princeton, 1998.

Leitão, H. e Almeida, B. A Anotação de Pedro Nunes acerca da “largura” dos Climats in Jorge Semedo de Matos (coord.), *António Estácio dos Reis. Marinheiro por Vocaçāo e Historiador por Devoçāo. Estudos de Homenagem* (pp. 123-142). Comissão Cultural de Marinha, Lisboa, 2012.

Nunes, P. (1502-1578) *Obras de Pedro Nunes, Tratado da Sphera. Astronomici Introductorii de Sphera Epítome*. Academia das Ciências de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2002.

Nunes, P. (1502-1578) *Obras de Pedro Nunes, De Crepusculis*. Academia das Ciências de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2003.

Plofker, K. *Mathematics in India*. Princeton University Press, Princeton, 2008.

Roy, R. *Sources in the Development of Mathematics, Series and Products from the Fifteenth to the Twenty-first Century*. Cambridge University Press, New York, 2011.

Sarma, K., Ramasubramanian, K., Srinivas, M. and Sriram, M. *Ganita-Yukti-Bhāsā (Rationales in Mathematical Astronomy) of Jyesthadeva*. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2008.

Sidoli, N. *Ptolemy's Mathematical Approach: Applied Mathematics in the Second Century*. Institute for the History and Philosophy of Science and Technology, University of Toronto, 2004.

Van Brummelen, G. *The mathematics of heavens and earth: the early history of trigonometry*. Princeton University Press, Princeton, 2009.

Van Brummelen, G. *Heavenly Mathematics: The Forgotten Art of Spherical Trigonometry*. Princeton University Press, Princeton, 2009.

Veloso, E. *Algumas Noções Elementares de Astronomia*. Associação dos Professores de Matemática, Lisboa, 1991.

Ventura, M. S. *Vida e Obra de Pedro Nunes*. Instituto de Cultura e Língua Portuguesa, Lisboa, 1985.

## Artigos eletrónicos

1. Maor, E. *Trigonometric Delights*. Princeton University Press, Princeton, 1998. Consultado em 20/12/2012 a partir de [http://press.princeton.edu/books/maor/chapter\\_2.pdf](http://press.princeton.edu/books/maor/chapter_2.pdf)
2. Pedersen, Olaf *A Survey of the Almagest, with annotation and new commentary of Alexander Jones*, Springer, New York, 2010. Consultado em 25/01/2013 a partir de [http://books.google.pt/books?id=8eaHxE9jUrwC&printsec=frontcover&hl=pt-PT&source=gbs\\_ge\\_summary\\_r&cad=0#v=onepage&q&f=false](http://books.google.pt/books?id=8eaHxE9jUrwC&printsec=frontcover&hl=pt-PT&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false)
3. Hogendijk, J.P. *Scientific computing in medieval Islamic civilization*, Utrecht University, Netherlands, 2011. Consultado em 1/07/2013 a partir de <http://www.jphogendijk.nl/talks/naota.pdf>
4. Sentelhas, Paulo e Angelocci, Luiz, *Aula 3: Definições e Conceitos*, USALQ-USP, 2009. Consultado em 1/08/2013 a partir de <http://www.lce.esalq.usp.br/aulas/lce306/Aula2.pdf>
5. Meléndez, Jorge *Latitudes Geográfica e Astronômica*. IAG-USP, 2011. Consultado em 13/08/2013 a partir de [http://www.astro.iag.usp.br/~jorge/aga205\\_2011/07\\_LatGeAst.pdf](http://www.astro.iag.usp.br/~jorge/aga205_2011/07_LatGeAst.pdf)

## Sites Web

1. Rhind Mathematical Papyrus. Disponível em [http://simple.wikipedia.org/wiki/File:Rhind\\_Mathematical\\_Papyrus.jpg](http://simple.wikipedia.org/wiki/File:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg) (2009); consultado em 25/11/2012
2. Hiparco de Nicea. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Hiparco> (2012); consultado em 1/12/2012
3. Hiparco de Nicea. Disponível em <http://www.astronomia-iniciacion.com/personajes/hiparco-de-nicea.html> (2011); consultado em 2/12/2012
4. Ptolemaeus. Disponível em <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Ptolemaeus.jpg> (2006); consultado em 8/12/2012
5. Bhaskara. Disponível em <http://matematicarev.blogspot.pt/2010/05/bhaskara-viveu-de-1114-1185.html> (2010); consultado em 28/12/12
6. Aryabhata. Disponível em <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Aryabhata.jpeg> (2010); consultado em 5/01/2013
7. A eclíptica. Disponível em [http://www.cienciaviva.pt/equinocio/lat\\_long/cap5.asp](http://www.cienciaviva.pt/equinocio/lat_long/cap5.asp); consultado em 20/01/2013
8. Astronomy information. Disponível em <http://www.astronomy.robshare.com/wp-content/uploads/2010/09/cel-sphere-2.gif> (2010); consultado em 25/01/2013

9. The Sun in the Church: Cathedrals as Solar Observatories, A Mathematical Supplement. Disponível em <http://www.math.nus.edu.sg/aslaksen/projects/heilbron/> (2001); consultado em 30/01/2013
10. Planetas. Disponível em [http://www.prof2000.pt/users/angelof/4\\_sistema\\_solar\\_planetas.htm](http://www.prof2000.pt/users/angelof/4_sistema_solar_planetas.htm); consultado em 1/03/2013
11. Indian Mathematics – Brāmagupta. Disponível em [http://www.storyofmathematics.com/indian\\_brahmagupta.html](http://www.storyofmathematics.com/indian_brahmagupta.html) (2010); consultado em 1/03/2013
12. al-Ishbili Abu Muhammad Jabir ibn Aflah. Disponível em [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jabir\\_ibn\\_Aflah.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jabir_ibn_Aflah.html) (1999); consultado em 3/04/2012
13. Jābir ibn Aflāḥ: Abū Muḥammad Jābir ibn Aflāḥ. Disponível em [http://islamsci.mcgill.ca/RASI/BEA/Jabir\\_ibn\\_Aflah\\_BEA.htm](http://islamsci.mcgill.ca/RASI/BEA/Jabir_ibn_Aflah_BEA.htm) (2007); consultado em 3/04/2012
14. Radian. Disponível em <http://en.wikipedia.org/wiki/Radian> (2013); consultado em 15/04/2013
15. Nasir al-Din al-Tusi. Disponível em [http://en.wikipedia.org/wiki/Nasir\\_al-Din\\_al-Tusi](http://en.wikipedia.org/wiki/Nasir_al-Din_al-Tusi) (2013); consultado em 1/06/2013
16. Anotações ao Tratado da Sphera. Disponível em <http://www.joaquimdecarvalho.org/artigos/artigo/145>; consultado em 10/06/2013
17. al-Kāshī. Disponível em <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/738852/al-Kashi> (2013); consultado em 15/06/2013
18. Euclid Elements. Disponível em <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html> (1997); consultado em Janeiro-Junho 2013
19. History of Trigonometry. Disponível em <http://nrich.maths.org/6843> (1997-2012); consultado em Novembro 2012- Agosto 2013
20. Biruni Iranian. Disponível em [http://lostislamichistory.com/wp-content/uploads/2013/04/Biruni\\_Iranian.jpg](http://lostislamichistory.com/wp-content/uploads/2013/04/Biruni_Iranian.jpg) (2013); consultado em 8/07/2013
21. Map of expansion of Caliphate. Disponível em [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Map\\_of\\_expansion\\_of\\_Caliphate.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Map_of_expansion_of_Caliphate.svg) (2012); consultado em 10/07/2013
22. Pedro Nunes. Disponível em [http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Pedro\\_Nunes.png](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Pedro_Nunes.png) (2010); consultado em 21/07/2013
23. Al-Kashi. Disponível em [http://muslimmedianetwork.com/mmn/windows-live-pictures/MuslimScientistsandThinkersJamshidAlKash\\_A87C/Scialkashi1.jpg](http://muslimmedianetwork.com/mmn/windows-live-pictures/MuslimScientistsandThinkersJamshidAlKash_A87C/Scialkashi1.jpg); consultado em 10/07/2013
24. Arabian Astrolabes, Clocks and Sundials, British Museum (2013) <http://traveltoeat.com/arabian-astrolabes-clocks-and-sundials-british-museum/>; consultado em 5/08/2013
25. Agulhas Náuticas: conversão de rumos e marcações. Disponível em <https://www.mar.mil.br/dhn/bhmn/download/cap3.pdf> (2013); consultado em 12/09/2013.
26. Azimute. Disponível em <http://nautilus.fis.uc.pt/astro/hu/movi/images/imagem15.jpg> (2003); consultado em 13/09/2013
27. *Determinação do desvio da agulha pelos azimutes dos astros*. Disponível em <https://www.mar.mil.br/dhn/bhmn/download/cap3.pdf> (2013); consultado em 13/09/2013.

28. *Sistema de Coordenadas Equatoriais*. Disponível em [http://www.on.br/ead\\_2013/site/conteudo/cap5-esfera/coordenadas-equatoriais.html](http://www.on.br/ead_2013/site/conteudo/cap5-esfera/coordenadas-equatoriais.html) (2013); consultado em 14/09/2013.

## Livros Eletrônicos

1. Claudius Ptolemaeus, *Almagestum*. Disponível em [http://www.univie.ac.at/hwastro/books/1515\\_ptole\\_ColMed.pdf](http://www.univie.ac.at/hwastro/books/1515_ptole_ColMed.pdf); consultado em 24/02/2013
2. Bartholomaei Pitisci, *Trigonometriae, sive de Dimensione triangulorum*, libro. Disponível em [http://books.google.pt/books?id=LyMFxgMZv4C&printsec=frontcover&hl=pt-PT&source=gbs\\_ge\\_summary\\_r&cad=0#v=onepage&q&f=false](http://books.google.pt/books?id=LyMFxgMZv4C&printsec=frontcover&hl=pt-PT&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false) ; consultado em 15/06/2013
3. Petro Apiano, *Instrumentum primi mobilis*. Disponível em <http://www.cervantesvirtual.com/obra-visor/instrumentum-primi-mobilis-a-petro-apiano-accedunt-ijs-gebri-filii-affla-hispalensis-libri-ix-de-astronomia-per-girardum-cremonensem-latinitate-donati--0/html/>; consultado em 5/08/2013

## Video

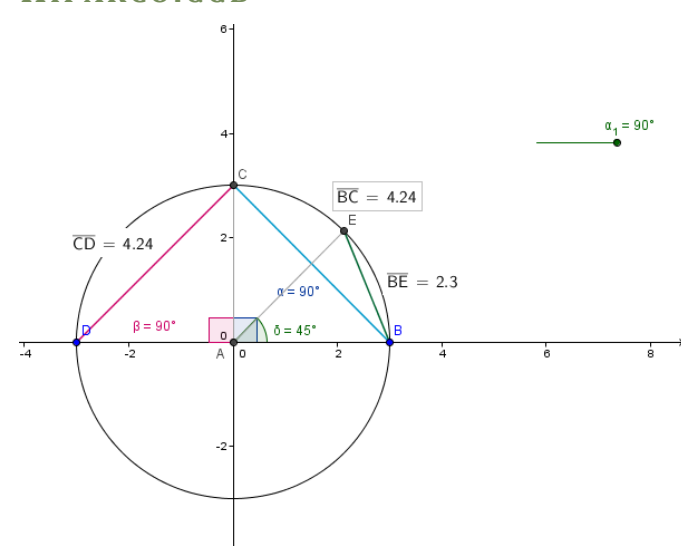
Calculating the circumference of the Earth by Al Biruni in Middle Ages. Disponível em <http://www.youtube.com/watch?v=fNuJlpxlSTo> (2013); consultado em 20/07/2013



## ANEXOS

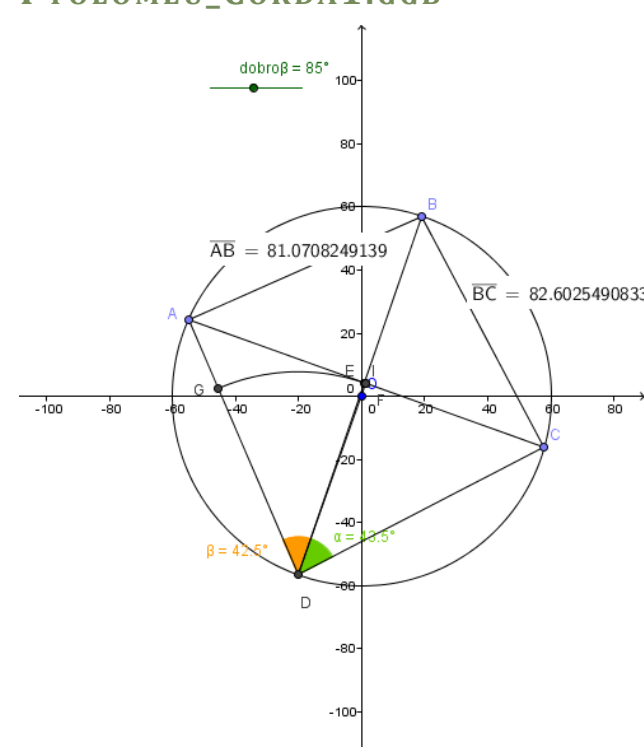
*Print screen* das Hiperligações

## HIPARCO.GGB



|    | A          | B       | C                       | D    | E            | F    |
|----|------------|---------|-------------------------|------|--------------|------|
| 1  | $\alpha_1$ | $\beta$ | $\overline{CD} = \dots$ | m    | distância... | n    |
| 2  |            | 110°    | 4.91                    | 4.91 | 1.8          | 1.8  |
| 3  |            | 145°    | 5.72                    | 5.72 | 0.91         | 0.91 |
| 4  |            | 159°    | 5.9                     | 5.9  | 0.55         | 0.55 |
| 5  |            | 180°    | 6                       | 6    | 0            | 0    |
| 6  |            | 173°    | 5.99                    | 5.99 | 0.18         | 0.18 |
| 7  |            | 162.5°  | 5.93                    | 5.93 | 0.46         | 0.46 |
| 8  |            | 155.5°  | 5.86                    | 5.86 | 0.64         | 0.64 |
| 9  |            | 148.5°  | 5.77                    | 5.77 | 0.82         | 0.82 |
| 10 |            | 145°    | 5.72                    | 5.72 | 0.91         | 0.91 |
| 11 |            | 134.5°  | 5.53                    | 5.53 | 1.18         | 1.18 |
| 12 |            | 131°    | 5.46                    | 5.46 | 1.27         | 1.27 |
| 13 |            | 124°    | 5.3                     | 5.3  | 1.45         | 1.45 |
| 14 |            | 117°    | 5.12                    | 5.12 | 1.63         | 1.63 |
| 15 |            | 113.5°  | 5.02                    | 5.02 | 1.72         | 1.72 |
| 16 |            | 106.5°  | 4.81                    | 4.81 | 1.89         | 1.89 |
| 17 |            | 99.5°   | 4.58                    | 4.58 | 2.06         | 2.06 |
| 18 |            | 92.5°   | 4.33                    | 4.33 | 2.24         | 2.24 |
| 19 |            | 90°     | 4.24                    | 4.24 | 2.3          | 2.3  |
| 20 |            |         |                         |      |              |      |

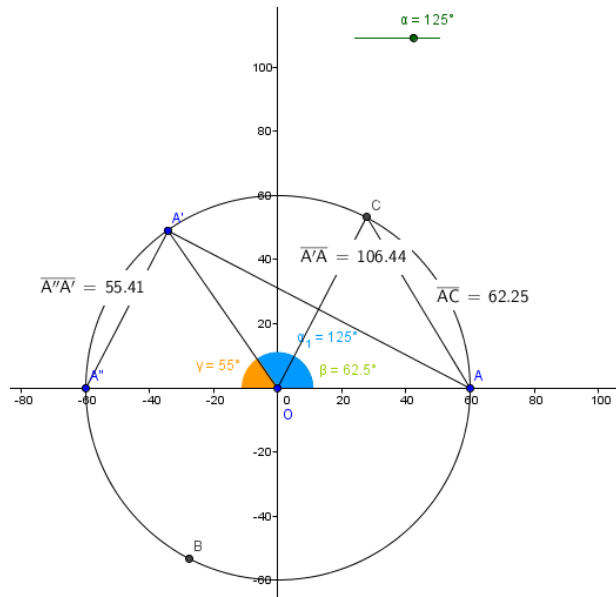
## PTOLOMEU\_CORDA1.GGB



|    | A       | B        | C            | D            | E          | F          |
|----|---------|----------|--------------|--------------|------------|------------|
| 1  | $\beta$ | $\alpha$ | $AB = \dots$ | $BC = \dots$ | Rcordas    | Rangulos   |
| 2  | 271°    | 272°     | 119.995...   | 119.995...   | 1          | ?          |
| 3  | 89°     | 90°      | 119.981...   | 120          | 1.00015... | 1.01123... |
| 4  | 88.5°   | 89.5°    | 119.958...   | 119.995...   | 1.00030... | 1.01129... |
| 5  | 88°     | 89°      | 119.926...   | 119.981...   | 1.00045... | 1.01136... |
| 6  | 87.5°   | 88.5°    | 119.885...   | 119.958...   | 1.00060... | 1.01142... |
| 7  | 87°     | 88°      | 119.835...   | 119.926...   | 1.00076... | 1.01149... |
| 8  | 86.5°   | 87.5°    | 119.776...   | 119.885...   | 1.00091... | 1.01156... |
| 9  | 86°     | 87°      | 119.707...   | 119.835...   | 1.00106... | 1.01162... |
| 10 | 85.5°   | 86.5°    | 119.630...   | 119.776...   | 1.00122... | 1.01169... |
| 11 | 85°     | 86°      | 119.543...   | 119.707...   | 1.00137... | 1.01176... |
| 12 | 84.5°   | 85.5°    | 119.447...   | 119.630...   | 1.00152... | 1.01183... |
| 13 | 84°     | 85°      | 119.342...   | 119.543...   | 1.00168... | 1.01190... |
| 14 | 83.5°   | 84.5°    | 119.228...   | 119.447...   | 1.00183... | 1.01197... |
| 15 | 83°     | 84°      | 119.105...   | 119.342...   | 1.00199... | 1.01204... |
| 16 | 82.5°   | 83.5°    | 118.973...   | 119.228...   | 1.00214... | 1.01212... |
| 17 | 82°     | 83°      | 118.832...   | 119.105...   | 1.00230... | 1.01219... |
| 18 | 81.5°   | 82.5°    | 118.681...   | 118.973...   | 1.00245... | 1.01226... |
| 19 | 81°     | 82°      | 118.522...   | 118.832...   | 1.00261... | 1.01234... |
| 20 | 80.5°   | 81.5°    | 118.354...   | 118.681...   | 1.00276... | 1.01242... |
| 21 | 80°     | 81°      | 118.176...   | 118.522...   | 1.00292... | 1.01255... |
| 22 | 79.5°   | 80.5°    | 117.990...   | 118.354...   | 1.00308... | 1.01257... |
| 23 | 79°     | 80°      | 117.795...   | 118.176...   | 1.00324... | 1.01265... |
| 24 | 78.5°   | 79.5°    | 117.590...   | 117.990...   | 1.00339... | 1.01273... |
| 25 | 78°     | 79°      | 117.377...   | 117.795...   | 1.00355... | 1.01280... |

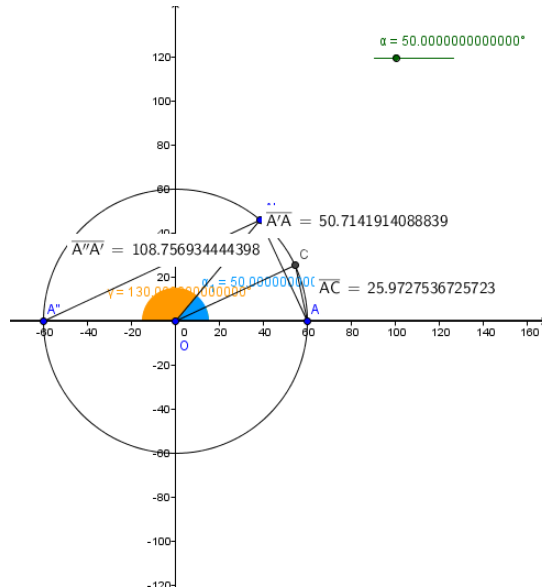


## PTOLOMEU\_TABELACORDAS.GGB



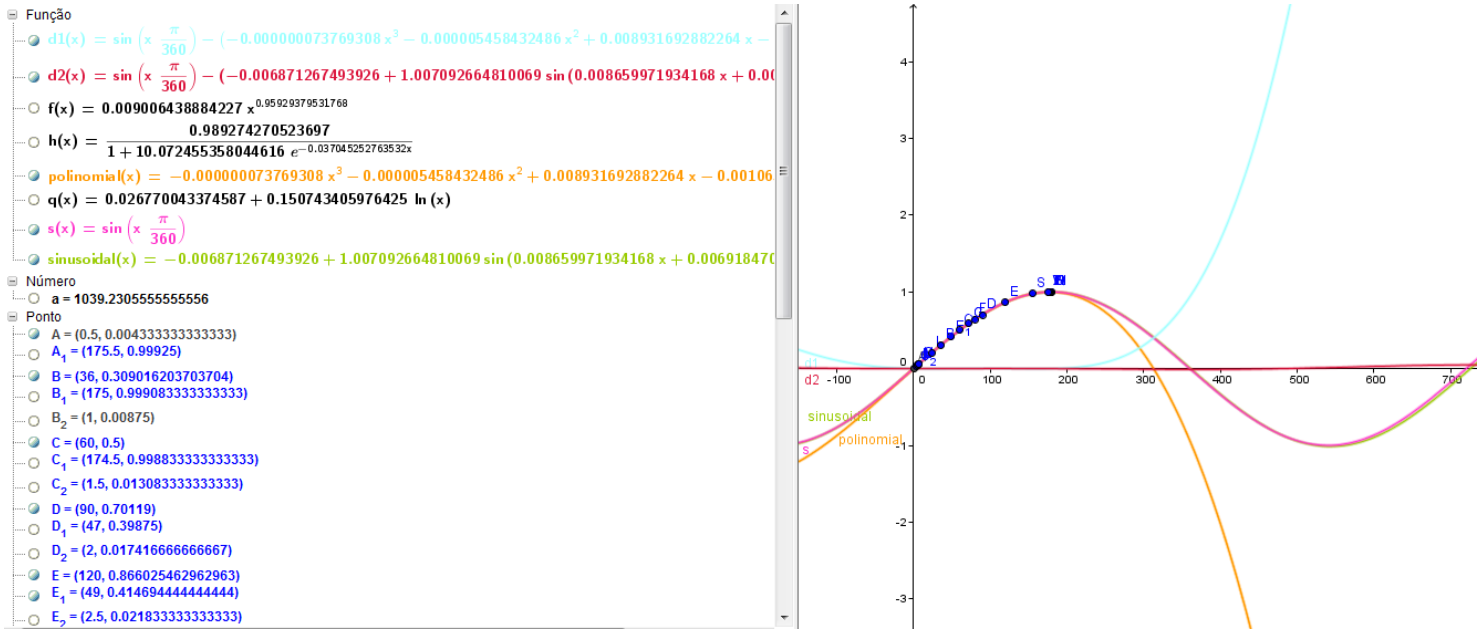
| 1  | $\alpha_1$ | crdsupl | j      | crdmet... | k    | senoPto | senoatual |
|----|------------|---------|--------|-----------|------|---------|-----------|
| 2  | 0°         | 120     | 120    | 0         | 0    | 0       | 0         |
| 3  | 0.5°       | 120     | 120    | 0.26      | 0.26 | 0       | 0         |
| 4  | 1°         | 120     | 120    | 0.52      | 0.52 | 0.01    | 0.01      |
| 5  | 2°         | 119.98  | 119.98 | 1.05      | 1.05 | 0.02    | 0.02      |
| 6  | 2.5°       | 119.97  | 119.97 | 1.31      | 1.31 | 0.02    | 0.02      |
| 7  | 3°         | 119.96  | 119.96 | 1.57      | 1.57 | 0.03    | 0.03      |
| 8  | 3.5°       | 119.94  | 119.94 | 1.83      | 1.83 | 0.03    | 0.03      |
| 9  | 4°         | 119.93  | 119.93 | 2.09      | 2.09 | 0.03    | 0.03      |
| 10 | 5°         | 119.89  | 119.89 | 2.62      | 2.62 | 0.04    | 0.04      |
| 11 | 5.5°       | 119.86  | 119.86 | 2.88      | 2.88 | 0.05    | 0.05      |
| 12 | 6°         | 119.84  | 119.84 | 3.14      | 3.14 | 0.05    | 0.05      |
| 13 | 6.5°       | 119.81  | 119.81 | 3.4       | 3.4  | 0.06    | 0.06      |
| 14 | 7°         | 119.78  | 119.78 | 3.66      | 3.66 | 0.06    | 0.06      |
| 15 | 8°         | 119.71  | 119.71 | 4.19      | 4.19 | 0.07    | 0.07      |
| 16 | 8.5°       | 119.67  | 119.67 | 4.45      | 4.45 | 0.07    | 0.07      |
| 17 | 9°         | 119.63  | 119.63 | 4.71      | 4.71 | 0.08    | 0.08      |
| 18 | 9.5°       | 119.59  | 119.59 | 4.97      | 4.97 | 0.08    | 0.08      |
| 19 | 10°        | 119.54  | 119.54 | 5.23      | 5.23 | 0.09    | 0.09      |
| 20 | 11°        | 119.45  | 119.45 | 5.76      | 5.76 | 0.1     | 0.1       |
| 21 | 11.5°      | 119.4   | 119.4  | 6.02      | 6.02 | 0.1     | 0.1       |
| 22 | 12°        | 119.34  | 119.34 | 6.28      | 6.28 | 0.1     | 0.1       |
| 23 | 12.5°      | 119.29  | 119.29 | 6.54      | 6.54 | 0.11    | 0.11      |

## PTOLOMEU\_SENO.GGB



| 1  | $\alpha$  | $\beta$   | sinPTO $\beta$      | sinATUAL $\beta$    | Dif                   |
|----|-----------|-----------|---------------------|---------------------|-----------------------|
| 2  | 169.00... | 84.500... | 0.995396198367179   | 0.995396198367179   | -1.11022302462516E-16 |
| 3  | 169.00... | 84.500... | 0.995396198367179   | 0.995396198367179   | -1.11022302462516E-16 |
| 4  | 170.00... | 85.000... | 0.996194698091746   | 0.996194698091746   | 0.000000000000000     |
| 5  | 171.00... | 85.500... | 0.996917333733128   | 0.996917333733128   | 0.000000000000000     |
| 6  | 172.00... | 86.000... | 0.997564050259824   | 0.997564050259824   | -1.11022302462516E-16 |
| 7  | 173.00... | 86.500... | 0.998134798421867   | 0.998134798421867   | 1.11022302462516E-16  |
| 8  | 174.00... | 87.000... | 0.998629534754574   | 0.998629534754574   | 2.22044604925031E-16  |
| 9  | 175.00... | 87.500... | 0.999048221581858   | 0.999048221581858   | -1.11022302462516E-16 |
| 10 | 176.00... | 88.000... | 0.999390827019096   | 0.999390827019096   | 2.22044604925031E-16  |
| 11 | 177.00... | 88.500... | 0.999657324975557   | 0.999657324975557   | 0.000000000000000     |
| 12 | 178.00... | 89.000... | 0.999847695156391   | 0.999847695156391   | 1.11022302462516E-16  |
| 13 | 179.00... | 89.500... | 0.999961923064171   | 0.999961923064171   | 0.000000000000000     |
| 14 | 0.0000... | 0.0000... | 0.000000000000000   | 0.000000000000000   | 0.000000000000000     |
| 15 | 1.0000... | 0.5000... | 8.72653549837394... | 8.72653549837393... | 1.73472347597681E-18  |
| 16 | 2.0000... | 1.0000... | 1.74524064372835... | 1.74524064372835... | 3.46944695195361E-18  |
| 17 | 3.0000... | 1.5000... | 2.61769483078732... | 2.61769483078732... | 3.46944695195361E-18  |
| 18 | 4.0000... | 2.0000... | 3.48994967025010... | 3.48994967025010... | 6.93889390390723E-18  |
| 19 | 5.0000... | 2.5000... | 4.36193873653360... | 4.36193873653360... | 0.000000000000000     |
| 20 | 6.0000... | 3.0000... | 5.23359562429438... | 5.23359562429438... | 6.93889390390723E-18  |
| 21 | 7.0000... | 3.5000... | 6.10485395348569... | 6.10485395348569... | 0.000000000000000     |
| 22 | 8.0000... | 4.0000... | 6.97564737441253... | 6.97564737441253... | -1.38777878078145E-17 |
| 23 | 9.0000... | 4.5000... | 7.84590957278450... | 7.84590957278450... | -2.77555756156289E-17 |

## PTOLOMEU\_REGRESSAO.GGB



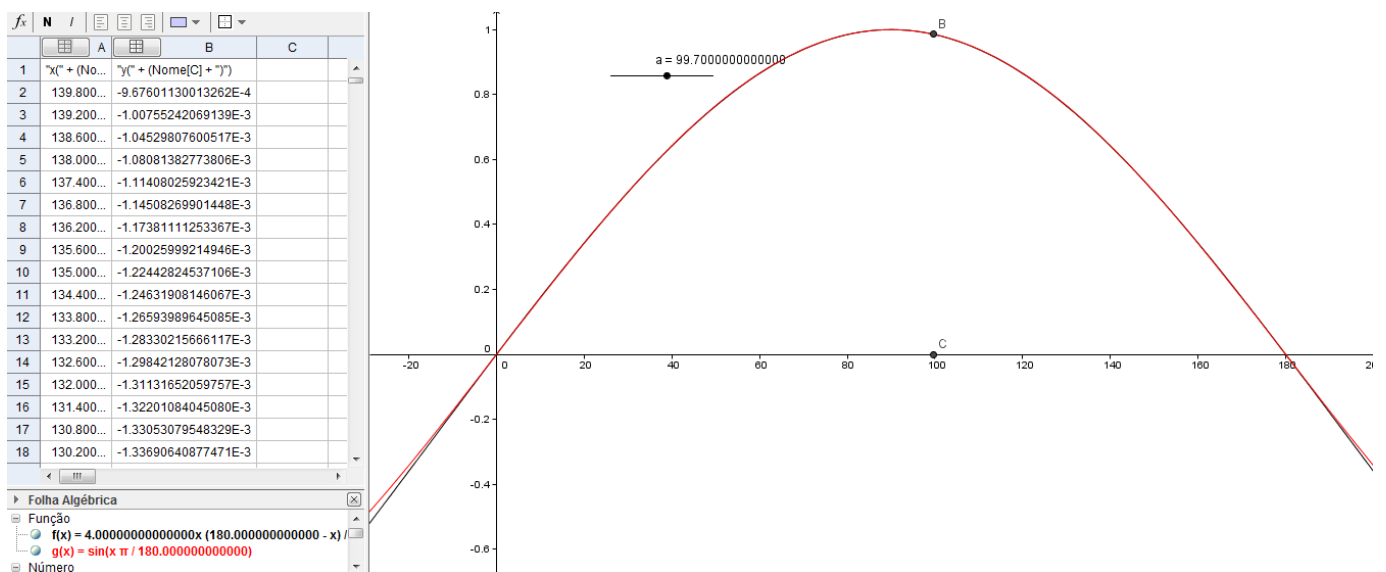
ARYABHATA\_CALCULODIFERENCAS.XLXS

| Tabela de Cálculo das Diferenças, arredondando em cada cálculo os valores de Aryabhata |           |   |  |                      |   |   |  |              |
|--|-----------|---|--|----------------------|---|---|--|--------------|
| Cálculo das Diferenças com a fórmula de Nilakanta                                      |           |   | Cálculo das Diferenças, arredondando em cada cálculo os valores de | Valores de Aryabhata | Erro 1 - Diferença entre os valores obtidos com o Excel e os valores obtidos arredondando, em cada cálculo, os valores di às unidades | Erro 2- Diferença entre os valores obtidos com o Excel (arredondando em cada cálculo os valores di) e os valores de Aryabhata | Erro 3- Diferença entre os valores obtidos com o Excel e os valores de Aryabhata |              |
| di   | θ (graus) |   | a fórmula de Nilakanta   |                      |   |   |  |              |
| d1   | 3,75      | ✓ | 225  | 225                  | 225   | 0   | 0  | 0            |
| d2   | 7,5       | ✓ | 224  | 224                  | 224   | 0   | 0  | 0            |
| d3   | 11,25     | ✓ | 222,0044444  | 222                  | 222   | -0,004444444  | 0  | 0,004444444  |
| d4   | 15        | ✓ | 219,0222025  | 219                  | 219   | -0,022202469  | 0  | 0,022202469  |
| d5   | 18,75     | ✓ | 215,0665285  | 215                  | 215   | -0,066528483  | 0  | 0,066528483  |
| d6   | 22,5      | ✓ | 210,1550033  | 210                  | 210   | -0,155003259  | 0  | 0,155003259  |
| d7   | 26,25     | ✓ | 204,3094558  | 204                  | 205   | -0,309455798  | -1   | -0,690544202 |
| d8   | 30        | ✓ | 197,5558663  | 197                  | 199   | -0,555866312  | -2   | -1,444133688 |
| d9   | 33,75     | ✓ | 189,9242508  | 189                  | 191   | -0,924250753  | -2   | -1,075749247 |
| d10  | 37,5      | ✓ | 181,4485274  | 181                  | 183   | -0,448527413  | -2   | -1,551472587 |
| d11  | 41,25     | ✓ | 172,1663662  | 172                  | 174   | -0,166366173  | -2   | -1,833633827 |
| d12  | 45        | ✓ | 162,1190211  | 162                  | 164   | -0,119021084  | -2   | -1,880978916 |
| d13  | 48,75     | ✓ | 151,351147   | 151                  | 154   | -0,351147012  | -3   | -2,648852988 |
| d14  | 52,5      | ✓ | 139,9106012  | 140                  | 143   | 0,089398825   | -3   | -3,089398825 |
| d15  | 56,25     | ✓ | 127,8482304  | 128                  | 131   | 0,151769555   | -3   | -3,151769555 |
| d16  | 60        | ✓ | 115,2176454  | 115                  | 119   | -0,217645357  | -4   | -3,782354643 |
| d17  | 63,75     | ✓ | 102,0749818  | 102                  | 106   | -0,074981845  | -4   | -3,925018155 |
| d18  | 67,5      | ✓ | 88,47865175  | 88                   | 93  | -0,478651747  | -5   | -4,521348253 |

ARYABHATA\_R-SENOS.XLXS

|     |           |   |                | Erro 1 - diferença entre os valores de seno a partir da fórmula e os valores de |              |           |           | Valores de  |              | Valores de R-seno a partir dos valores de |                | Valores de seno a partir dos valores de |  | Erro 2 - diferença entre os valores de seno de Aryabhata e os valores |  |
|-----|-----------|---|----------------|---|--------------|-----------|-----------|-------------|--------------|---|----------------|---|--|---|--|
| di  | θ (graus) | Cálculo das Diferenças com a fórmula de Nilakanta | Valores R-seno | Valores de seno a partir da fórmula de Nilakanta                                | seno atuais  | Aryabhata | Aryabhata | Aryabhata   | Aryabhata    | Aryabhata                                 | de seno atuais |   |  |   |  |
| d1  | 3,75      | 225   | 225            | 0,065398319   | -4,81045E-06 | 225       | 225       | 0,065445026 | 4,18969E-05  |   |                |   |  |   |  |
| d2  | 7,5       | 224   | 449            | 0,130282849   | -0,000297943 | 224       | 449       | 0,130599186 | 7,29934E-05  |   |                |   |  |   |  |
| d3  | 11,25     | 222,0044444                                       | 671,0044444    | 0,193936159   | -0,001154163 | 222       | 671       | 0,195171611 | 8,12894E-05  |   |                |   |  |   |  |
| d4  | 15        | 219,0222025                                       | 890,0266469    | 0,255997249   | -0,002821796 | 219       | 890       | 0,258871437 | 5,23918E-05  |   |                |   |  |   |  |
| d5  | 18,75     | 215,0665285                                       | 1105,093175    | 0,315928291   | -0,005511174 | 215       | 1105      | 0,321407795 | -3,16701E-05 |   |                |   |  |   |  |
| d6  | 22,5      | 210,1550033                                       | 1315,248179    | 0,373298494   | -0,009384938 | 210       | 1315      | 0,38248982  | -0,000193613 |   |                |   |  |   |  |
| d7  | 26,25     | 204,3094558                                       | 1519,557634    | 0,427738028   | -0,014550662 | 205       | 1520      | 0,44211751  | -0,00017118  |   |                |   |  |   |  |
| d8  | 30        | 197,5558663                                       | 1717,113501    | 0,478943919   | -0,021056081 | 199       | 1719      | 0,5         | 0            |   |                |   |  |   |  |
| d9  | 33,75     | 189,9242508                                       | 1907,037752    | 0,526683151   | -0,028887082 | 191       | 1910      | 0,555555556 | -1,46775E-05 |   |                |   |  |   |  |
| d10 | 37,5      | 181,4485274                                       | 2088,486279    | 0,570792975   | -0,037968454 | 183       | 2093      | 0,608784177 | 2,27478E-05  |   |                |   |  |   |  |
| d11 | 41,25     | 172,1663662                                       | 2260,652645    | 0,611178553   | -0,048167262 | 174       | 2267      | 0,659394997 | 4,9182E-05   |   |                |   |  |   |  |
| d12 | 45        | 162,1190211                                       | 2422,771666    | 0,647808212   | -0,059298569 | 164       | 2431      | 0,70709715  | -9,63168E-06 |   |                |   |  |   |  |
| d13 | 48,75     | 151,351147  | 2574,122813    | 0,680706637   | -0,07113317  | 154       | 2585      | 0,751890634 | 5,08266E-05  |   |                |   |  |   |  |
| d14 | 52,5      | 139,9106012                                       | 2714,033414    | 0,70994645  | -0,083406891 | 143       | 2728      | 0,793484584 | 0,000131244  |   |                |   |  |   |  |
| d15 | 56,25     | 127,8482304                                       | 2841,881645    | 0,73563861  | -0,095831002 | 131       | 2859      | 0,831588133 | 0,00011852   |   |                |   |  |   |  |
| d16 | 60        | 115,2176454                                       | 2957,09929     | 0,757922127   | -0,108103277 | 119       | 2978      | 0,86620128  | 0,000175876  |   |                |   |  |   |  |
| d17 | 63,75     | 102,0749818                                       | 3059,174272    | 0,779953517   | -0,119919224 | 106       | 3084      | 0,897033159 | 0,000160417  |   |                |   |  |   |  |
| d18 | 67,5      | 88,47865175                                       | 3147,652924    | 0,792896438   | -0,130983094 | 93        | 3177      | 0,92408377  | 0,000204237  |   |                |   |  |   |  |
| d19 | 71,25     | 74,4890832  | 3222,142007    | 0,805911866   | -0,141018263 | 79        | 3256      | 0,947062245 | 0,000132116  |   |                |   |  |   |  |
| d20 | 75        | 60,16845205                                       | 3282,310459    | 0,816149137   | -0,149776689 | 65        | 3321      | 0,965968586 | 4,27601E-05  |   |                |   |  |   |  |
| d21 | 78,75     | 45,58040557                                       | 3327,890865    | 0,823738106   | -0,157047174 | 51        | 3372      | 0,980802792 | 1,75119E-05  |   |                |   |  |   |  |
| d22 | 82,5      | 30,78977951                                       | 3358,680644    | 0,828782636   | -0,162662225 | 37        | 3409      | 0,991564863 | 0,000120002  |   |                |   |  |   |  |
| d23 | 86,25     | 15,86230998                                       | 3374,542954    | 0,831355563   | -0,16650336  | 22        | 3431      | 0,997963933 | 0,000105009  |   |                |   |  |   |  |

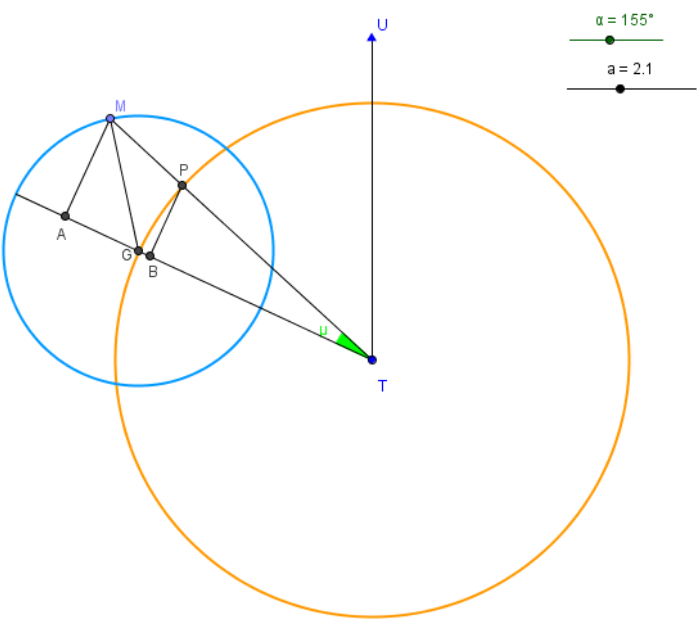
**BHASKARA.GGB**



MADHAVA.XLXS

| ângulo em graus | ângulo em radianos | seno em radianos | Ordem 1     | Ordem 3     | Ordem 5     | Ordem 7     | Ordem 9     | Ordem 11    | Ordem 13    | Ordem 15    | Ordem 17    |
|-----------------|--------------------|------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 3,75            | 0,065449847        | 0,065403129      | 0,065449847 | 0,065403119 | 0,065403129 | 0,065403129 | 0,065403129 | 0,065403129 | 0,065403129 | 0,065403129 | 0,065403129 |
| 7,5             | 0,130899694        | 0,130526192      | 0,130899694 | 0,130525872 | 0,130525882 | 0,130525882 | 0,130525882 | 0,130525882 | 0,130525882 | 0,130525882 | 0,130525882 |
| 11,25           | 0,196349541        | 0,195090322      | 0,196349541 | 0,195087892 | 0,195087902 | 0,195087902 | 0,195087902 | 0,195087902 | 0,195087902 | 0,195087902 | 0,195087902 |
| 15              | 0,261799388        | 0,258819045      | 0,261799388 | 0,258808813 | 0,258808823 | 0,258808823 | 0,258808823 | 0,258808823 | 0,258808823 | 0,258808823 | 0,258808823 |
| 18,75           | 0,327249235        | 0,321439465      | 0,327249235 | 0,321408269 | 0,321408279 | 0,321408279 | 0,321408279 | 0,321408279 | 0,321408279 | 0,321408279 | 0,321408279 |
| 22,5            | 0,392699082        | 0,382683432      | 0,392699082 | 0,382605893 | 0,382605903 | 0,382605903 | 0,382605903 | 0,382605903 | 0,382605903 | 0,382605903 | 0,382605903 |
| 26,25           | 0,458148929        | 0,44228869       | 0,458148929 | 0,442121318 | 0,442121328 | 0,442121328 | 0,442121328 | 0,442121328 | 0,442121328 | 0,442121328 | 0,442121328 |
| 30              | 0,523598776        | 0,5              | 0,523598776 | 0,499674179 | 0,499674189 | 0,499674189 | 0,499674189 | 0,499674189 | 0,499674189 | 0,499674189 | 0,499674189 |
| 33,75           | 0,589048623        | 0,555570233      | 0,589048623 | 0,55498411  | 0,55498412  | 0,55498412  | 0,55498412  | 0,55498412  | 0,55498412  | 0,55498412  | 0,55498412  |
| 37,5            | 0,654498469        | 0,608761429      | 0,654498469 | 0,607770743 | 0,607770753 | 0,607770753 | 0,607770753 | 0,607770753 | 0,607770753 | 0,607770753 | 0,607770753 |
| 41,25           | 0,719948316        | 0,659345815      | 0,719948316 | 0,657753712 | 0,657753722 | 0,657753722 | 0,657753722 | 0,657753722 | 0,657753722 | 0,657753722 | 0,657753722 |
| 45              | 0,785398163        | 0,707106781      | 0,785398163 | 0,704652651 | 0,704652661 | 0,704652661 | 0,704652661 | 0,704652661 | 0,704652661 | 0,704652661 | 0,704652661 |

EQUACAOPLANETARIA.GGB



## AL-KASHI.GGB

| xn+1              | g(xn)  |                        |
|-------------------|--|------------------------|
| x                 | $\frac{x^3 + 2820 + 6 + \frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{53}{60^3} + \frac{37}{60^4} + 0.000000003858025 + 0.000000000964506}{2700}$ | Erro =Sin (1°) - g(xn) |
| 1                 | 1.047089495229267  | 0.000054891007744      |
| 1.047089495229267 | 1.047144319364299  | 0.000000066872712      |
| 1.047144319364299 | 1.047144386155556  | 0.000000000081454      |
| 1.047144386155556 | 1.047144386236931  | 0.000000000000079      |
| 1.047144386236931 | 1.04714438623703   | -0.000000000000002     |
| 1.04714438623703  | 1.047144386237031  | -0.000000000000002     |
| 1.047144386237031 | 1.047144386237031  | -0.000000000000002     |
| 1.047144386237031 | 1.047144386237031  | -0.000000000000002     |
| 1.047144386237031 | 1.047144386237031  | -0.000000000000002     |
| 1.047144386237031 | 1.047144386237031  | -0.000000000000002     |
| 1.047144386237031 | 1.047144386237031  | -0.000000000000002     |
| 1.047144386237031 | 1.047144386237031  | -0.000000000000002     |
| 1.047144386237031 | 1.047144386237031  | -0.000000000000002     |
| 1.047144386237031 | 1.047144386237031  | -0.000000000000002     |
| 1.047144386237031 | 1.047144386237031  | -0.000000000000002     |
| 1.047144386237031 | 1.047144386237031  | -0.000000000000002     |
| 1.047144386237031 | 1.047144386237031  | -0.000000000000002     |
| 1.047144386237031 | 1.047144386237031  | -0.000000000000002     |
| 1.047144386237031 | 1.047144386237031  | -0.000000000000002     |
| 1.047144386237031 | 1.047144386237031  | -0.000000000000002     |
| 1.047144386237031 | 1.047144386237031  | -0.000000000000002     |

## Demonstração da fórmula da soma de potências inteiras de Jyesthadeva

Um resultado usado por Madhava na obtenção das séries para o seno e cosseno é o seguinte:

$$\sum_{k=1}^n k^p \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}$$

e que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Podemos encontrar a sua demonstração no trabalho *Yuktibhasa* de Jyesthadeva, traduzido para inglês por Sarma (2008). É uma demonstração por indução embora não tenha realizado a indução na totalidade.

Vamos seguir esta demonstração a partir da obra *Ganita-Yukti-Bhāsā* de Jyesthadeva, mas com várias adaptações no tipo de argumentação. A notação usada é a atual para facilitar a leitura.

Começa-se por ver o resultado para  $k = 1$ .

Seja  $k = 1$  e  $s_1(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ .

Somemos as duas séries que se seguem:

$$\begin{aligned} n + n + \dots + n + n + n &= n^2 \\ -n - (n-1) - \dots - 3 - 2 - 1 &= -s_1. \end{aligned}$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} n^2 - s_1(n) &= n - n + n - (n-1) + \dots + n - 3 + n - 2 + n - 1 = \\ &= 1 + 2 + \dots + n - 3 + n - 2 + n - 1 = s_1 - n. \end{aligned}$$

donde:

$$n^2 - s_1(n) = s_1(n) - n \Leftrightarrow n^2 + n = 2s_1(n) \Leftrightarrow s_1(n) = \frac{n^2 + n}{2} \Leftrightarrow s_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Logo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_1(n)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Provamos o resultado para  $k = 1$ .

Vejamos agora o resultado para  $k = 2$ .

Seja  $s_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \dots + n \times n$ .

Como  $s_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$  vem:

$$1 \times n + 2 \times n + \dots + n \times n = s_1 \times n = \frac{1}{2}n(n+1) \times n = \frac{1}{2}n^2(n+1).$$

Subtraindo as duas séries anteriores obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n^2(n+1) - s_2(n) &= (1 \times n + 2 \times n + \dots + (n-1) \times n + n \times n) - (1 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + (n-1) \times (n-1) + n \times n) \\ &= 1 \times (n-1) + 2 \times (n-2) + \dots + (n-(n-1)) \times (n-1) + n \times (n-n) = \\ &= (n-1) \times 1 + (n-2) \times 2 + \dots + 1 \times (n-1). \end{aligned}$$

Vamos agora escrever  $(n-1) \times 1 + (n-2) \times 2 + (n-3) \times 3 + \dots + 1 \times (n-1)$  como uma soma triangular:

$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + \dots + (n-3) + (n-2) + (n-1) \\ 1 + 2 + 3 + \dots + (n-3) + (n-2) \\ 1 + 2 + 3 + \dots + (n-3) \\ \dots \\ 1 + 2 + 3 \\ 1 + 2 \\ 1 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + \dots + (n-3) + (n-2) + (n-1) \\ 1 + 2 + 3 + \dots + (n-3) + (n-2) \\ 1 + 2 + 3 + \dots + (n-3) \\ \dots \\ 1 + 2 + 3 \\ 1 + 2 \\ 1 \end{array}} \right\} \begin{array}{c} (n-1) \text{ somas} \end{array}$$

Fazendo as somas na horizontal obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n^2(n+1) - s_2(n) &= \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \dots + \frac{1}{2} \times 4 \times 3 + \frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = \\ &= 1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{1}{2} \times (n-2) \times (n-1) + \frac{1}{2} \times (n-1) \times n. \end{aligned}$$

A sequência  $1, 3, 6, 10, \dots, \frac{1}{2} \times (n-2) \times (n-1), \frac{1}{2} \times (n-1) \times n$  é uma progressão aritmética de 2ª ordem.

Usando a fórmula da soma para as progressões aritméticas de 2ª ordem obtemos:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{1}{2} \times (n-2) \times (n-1) + \frac{1}{2} \times (n-1) \times n &= \\ = 2n + \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2). \end{aligned}$$

Igualando  $\frac{1}{2}n^2(n+1) - s_2(n)$  à expressão anteriormente obtida:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}n^2(n+1) - s_2(n) &= 2n + \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - s_2 = 2n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + \\ \frac{1}{6}n^3 - \frac{3}{6}n^2 + \frac{2}{6}n &\Leftrightarrow s_2(n) = \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - 2n + \frac{1}{2}n - \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{3}n \Leftrightarrow s_2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{11}{6}n.\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_2(n)}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{11}{6}n}{n^3} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{11}{2}n}{n^3} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{3}{2n} - \frac{11}{2n^2}\right)}{n^3} = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{2n} - \frac{11}{2n^2}\right) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Provamos o resultado para  $k = 2$ .

Nota: Para uma sequência  $b_1, b_2, b_3, \dots$  que não é uma progressão aritmética, mas em que a sequência  $a_1, a_2, a_3, \dots$  obtida pelas diferenças de seus termos consecutivos é uma progressão aritmética de razão  $r$ , a sequência  $b_1, b_2, b_3, \dots$  é denominada progressão aritmética de ordem 2 ou progressão aritmética de 2ª ordem. A fórmula da soma de uma progressão aritmética de 2ª ordem é:

$$S_n(n) = a_1 \times n + \frac{b_1}{2} \times n \times (n-1) + \frac{r}{6} \times n \times (n-1) \times (n-2).$$

Na sequência  $1, 3, 6, 10, \dots, \frac{1}{2} \times (n-2) \times (n-1), \frac{1}{2} \times (n-1) \times n$ :

$$- b_1 = 1;$$

$$- a_1 = b_2 - b_1 = 3 - 1 = 2;$$

$$- a_2 = b_3 - b_2 = 6 - 3 = 3;$$

$$- r = a_2 - a_1 = 3 - 2 = 1.$$

A soma das potências de números naturais de expoente 3 e 4 são obtidas por argumentos semelhantes:

$$\frac{s_3(n)}{n^4} = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \frac{s_4(n)}{n^5} = \frac{1}{5} \quad \text{para valores suficientemente grandes de } n.$$

Usando um raciocínio análogo obtém-se para  $k \in \mathbb{N}$  o resultado:

$$\frac{s_k(n)}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \quad \text{para valores suficientemente grandes de } n.$$

Nesta demonstração temos uma forma de passagem ao infinito!



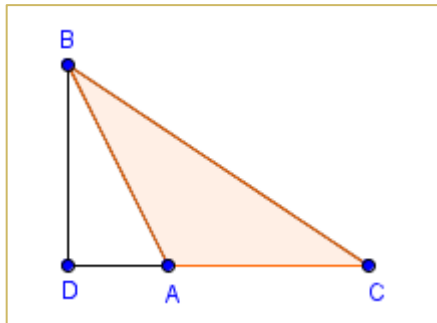
# Demonstrações dos Elementos de Euclides

## Euclides II, 12

*Em triângulos obtusos, o quadrado do lado oposto ao ângulo obtuso é maior que a soma dos quadrados dos lados que formam o ângulo obtuso, sendo esta diferença igual ao dobro do retângulo em que um dos lados é o segmento de reta compreendido entre a perpendicular a um dos lados do ângulo obtuso e o prolongamento do outro lado do ângulo obtuso e o outro lado do retângulo é um segmento que se encontra nesse prolongamento compreendido entre o vértice do ângulo obtuso e a interseção entre a perpendicular e o prolongamento.*

### Demonstração:

Seja  $ABC$  um triângulo obtusângulo sendo  $BAC$  o ângulo obtuso.



Prolongue-se o segmento  $CA$ . Desenhe-se  $BD$  a partir de  $B$  e perpendicularmente a  $CA$ .

Euclides afirma que o quadrado de  $BC$  é maior que a soma dos quadrados de  $BA$  e  $AC$  sendo que a diferença entre a soma dos quadrados referida e o quadrado de  $BC$  é igual ao dobro da área do retângulo de lados  $CA$  e  $AD$ .

Como a linha reta  $CD$  está cortada por  $A$ , o quadrado de  $DC$  é igual à soma dos quadrados de  $CA$  e  $AD$  com o dobro da área do retângulo de lados  $CA$  e  $AD$  (por Euclides II, 4) ou seja:

$$DC^2 = CA^2 + AD^2 + 2 \cdot CA \cdot AD.$$

Soma-se o quadrado de  $DB$  a ambos os membros:

$$DC^2 + DB^2 = CA^2 + AD^2 + 2 \cdot CA \cdot AD + DB^2.$$

Pela proposição I, 47:

-  $CB^2 = CD^2 + DB^2$ , pois o ângulo em  $D$  é reto;

-  $AB^2 = DB^2 + AD^2$ , pela mesma razão.

Obtemos:

$$\begin{aligned} CB^2 &= CA^2 + AD^2 + 2 \cdot CA \cdot AD + DB^2 = CA^2 + AD^2 + DB^2 + 2 \cdot CA \cdot AD = \\ &= CA^2 + AB^2 + 2 \cdot CA \cdot AD. \end{aligned}$$

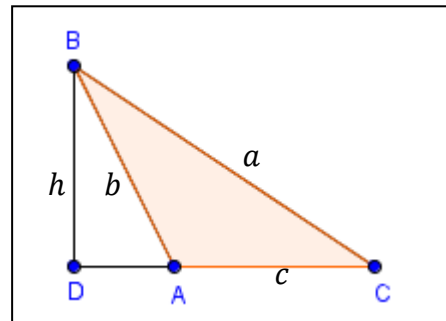
Assim está provado o resultado.

Notas: na proposição II, 13 é obtida a mesma conclusão só que para triângulos acutângulos.

Em qualquer dos casos o resultado obtido está muito próximo da lei dos cossenos para triângulos oblíquos (agudos ou obtusângulos):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

onde a altura  $h$  é igual a  $b \cos A$ .

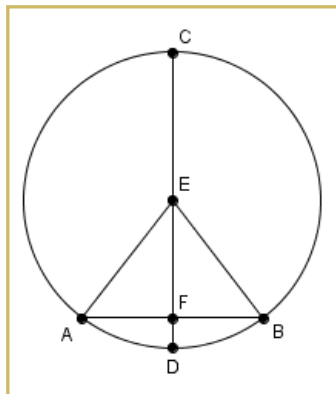


### Euclides III, 3

*Se uma reta que passa pelo centro de um círculo bissecta uma reta que não passa pelo centro do círculo, então é-lhe perpendicular; e se lhe é perpendicular então bissecta-a.*

**Demonstração:**

Seja  $CD$  uma reta que passa pelo centro de um círculo  $ABC$  e que bissecta o segmento  $AB$ , que não passa pelo centro, no ponto  $F$ .



*Pretende-se mostrar que  $CD$  é perpendicular a  $AB$ .*

Começemos por considerar que o centro do círculo  $ABC$  é  $E$  e de seguida une-se  $E$  a  $A$  e  $E$  a  $B$ .

Pelo critério *LLL* os triângulos  $AEF$  e  $BEF$  são geometricamente iguais pois:

- $EF$  é um segmento comum;
- $AF$  é igual a  $FB$  por hipótese;
- $AE$  é igual a  $EB$ , pois são raios.

Daqui resulta que o ângulo  $AFE$  é igual ao ângulo  $BFE$ .

Mas quando uma reta intersesta outra reta criando ângulos adjacentes iguais, então esses ângulos iguais são retos. Assim os ângulos  $AFE$  e  $BFE$  são retos.

Então  $CD$ , que passa pelo centro e bissecta  $AB$  que não passa pelo centro, é perpendicular a  $CD$ .

*Em relação ao recíproco:*

Consideremos que  $CD$  é perpendicular a  $AB$ .

A mostrar que  $CD$  bissecta  $AB$  ou seja  $AF$  é igual a  $FB$ .

Com a mesma construção que usamos anteriormente, como  $EA$  é igual a  $EB$ , o ângulo  $EAF$  é igual a  $EBF$  (pois num triângulo a lados iguais opõe-se ângulos iguais).

Pelo critério  $ALA$ , os triângulos  $AEF$  e  $BEF$  são geometricamente iguais:

- os ângulos  $AFE$  e  $BFE$  são ambos retos por construção;
- como os ângulos  $EAF$  e  $EBF$  têm a mesma amplitude e os ângulos  $AFE$  e  $BFE$  são ambos retos, consequentemente os ângulos  $AEF$  e  $BEF$  também têm a mesma amplitude;
- $EF$  é comum aos dois triângulos.

Desta igualdade de triângulos resulta que  $AF$  é igual a  $FB$ .

Assim,  $CD$  bissecta  $AB$ .

### Euclides VI, 3

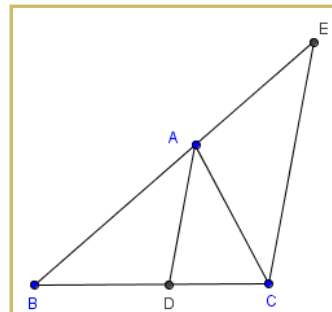
*Se um ângulo é bissetado por uma linha reta que intersesta a base, então os segmentos da base têm a mesma razão que os lados restantes do triângulo; (e se os segmentos da base têm a mesma razão que os restantes lados do triângulo, então a linha reta que une o vértice ao ponto do lado oposto bissecta o ângulo do triângulo).*

#### Demonstração:

Vamos provar apenas a primeira parte da afirmação, dado ser a que está presente no trabalho.

Seja  $ABC$  um triângulo, e considere-se que o ângulo  $BAC$  é bissetado pelo segmento de reta  $AD$ .

Pretende-se mostrar que  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ .



Desenhe-se uma semirreta passando por  $C$  e paralelo a  $DA$ . Prolongue-se  $AB$  até encontrar a semirreta anteriormente desenhada. Seja  $E$  o ponto de interseção entre a semirreta desenhada e o prolongamento de  $AB$ .

Como  $AD$  é paralela a  $CE$ , os ângulos  $ACE$  e  $CAD$  são iguais pois são ângulos alternos internos. Mas o ângulo  $CAD$  é igual ao ângulo  $BAD$  por hipótese. Logo o ângulo  $BAD$  é igual ao ângulo  $ACE$ .

Da mesma maneira, como  $AD$  é paralela a  $EC$ , o ângulo  $BAD$  é igual ao ângulo  $AEC$ , pois são ângulos agudos de lados paralelos.

Mas o ângulo  $ACE$  é igual ao ângulo  $BAD$ . Logo o ângulo  $ACE$  é igual ao ângulo  $AEC$ . Logo o triângulo  $ACE$  é isósceles e  $AC$  é igual a  $AE$ .

Como os triângulos  $ABD$  e  $BEC$  são semelhantes pelo critério  $AA$ , pois têm os ângulos em  $B$  e  $E$  em comum, os lados são proporcionais:  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}$ .

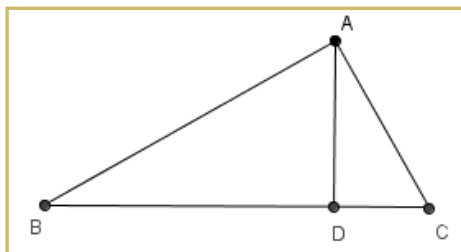
Como  $AE$  é igual a  $AC$ , vem:  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ .

## Euclides VI, 8

*Se num triângulo retângulo uma perpendicular é desenhada do ângulo reto para a base, então os triângulos adjacentes à perpendicular são semelhantes ao triângulo inicial e são semelhantes entre si.*

### Demonstração:

Seja  $ABC$  um triângulo retângulo que tem o ângulo  $BAC$  como ângulo reto e seja  $AD$  desenhado de  $A$  perpendicular a  $BC$ .



Pretende-se mostrar que os triângulos  $DBA$  e  $DAC$  são semelhantes ao triângulo inicial  $ABC$  e para além disso são semelhantes entre si.

Primeiro passo: Os triângulos  $ABC$  e  $DBA$  são semelhantes pelo critério  $AA$ :

- o ângulo  $BAC$  é igual ao ângulo  $BDA$ , pois são ambos retos;
- o ângulo  $B$  é comum aos dois triângulos.

Da semelhança anterior resulta que os ângulos  $ACB$  e  $DAB$  são iguais.

Podemos também escrever:  $\frac{BC}{BA} = \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DA}$ .

Segundo Passo: Pelas mesmas razões às anteriormente apresentadas, o triângulo  $DAC$  é semelhante ao triângulo  $ABC$ .

Terceiro Passo: Os triângulos  $DBA$  e  $DAC$  são semelhantes pelo critério  $AA$  pois:

- os ângulos  $ADB$  e  $ADC$  têm ambos  $90^\circ$  de amplitude
- já se sabe que o ângulo  $DAB$  é igual ao ângulo em  $C$ .

Assim podemos escrever:  $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD} = \frac{BA}{AC}$ .

### Corolários da Proposição 8

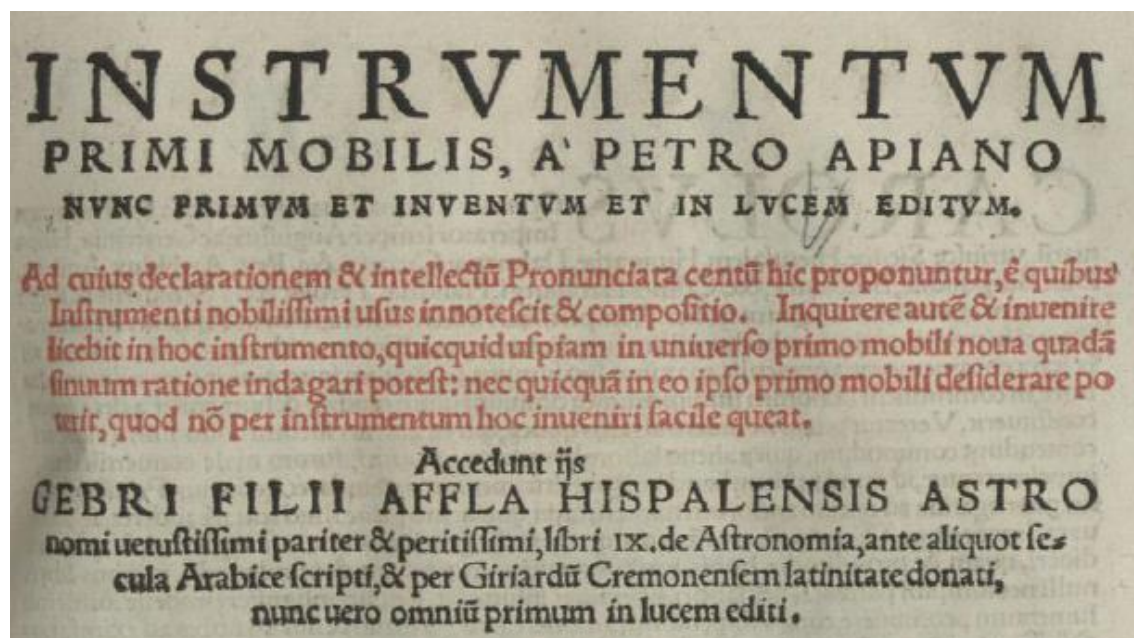
Da Proposição anterior resulta:

-  $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD} \Leftrightarrow AD^2 = BD \cdot CD$ , ou seja se num triângulo retângulo uma perpendicular é desenhada do ângulo reto para a base, então o segmento desenhado é a média proporcional entre os segmentos da base.

-  $\frac{BC}{BA} = \frac{AB}{DB} \Leftrightarrow AB^2 = BC \cdot DB$  ou seja se num triângulo retângulo uma perpendicular é desenhada do ângulo reto para a base, então um dos catetos do triângulo retângulo é a média geométrica entre a hipotenusa e a sua projeção na hipotenusa.

## Petrus Apianus – extrato da sua tabela de senos

A fonte é o Livro Eletrónico: Petro Apiano, Instrumentum primi mobilis. Na tabela de senos de Apiano encontramos os valores de Seno usados por Pedro Nunes. Segue-se um extrato da tabela.



NORIMBERGAE APVD IO. PETREIVM. ANNO M. D. XXXIIII

Tabula Sinuū rectorū siue semichordarū minutim extensa.

|          | 40    | 41    | 42    | 43    | 44    | 45    | 46    | 47    | 48    | 49    |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| m. Sinus | Sinus | Sinus | Sinus | Sinus | Sinus | Sinus | Sinus | Sinus | Sinus | Sinus |
| 0        | 64278 | 65605 | 66913 | 68199 | 69465 | 70710 | 71933 | 73135 | 74314 | 75470 |
| 1        | 64301 | 65627 | 66934 | 68221 | 69486 | 70731 | 71954 | 73155 | 74333 | 75490 |
| 2        | 64323 | 65649 | 66956 | 68242 | 69507 | 70751 | 71974 | 73175 | 74353 | 75509 |
| 3        | 64345 | 65671 | 66977 | 68263 | 69523 | 70772 | 71994 | 73194 | 74372 | 75528 |
| 4        | 64367 | 65693 | 66999 | 68284 | 69540 | 70790 | 72011 | 73211 | 74390 | 75546 |

Tabula Sinuū rectorū siue semichordarū minutim extensa.

|          | 50    | 51    | 52    | 53    | 54    | 55    | 56    | 57    | 58    | 59    |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| m. Sinus | Sinus | Sinus | Sinus | Sinus | Sinus | Sinus | Sinus | Sinus | Sinus | Sinus |
| 0        | 76604 | 77714 | 78801 | 79863 | 80901 | 81915 | 82903 | 83867 | 84804 | 85716 |
| 1        | 76623 | 77732 | 78818 | 79881 | 80918 | 81931 | 82920 | 83882 | 84820 | 85731 |
| 2        | 76641 | 77751 | 78836 | 79898 | 80945 | 81948 | 82936 | 83898 | 84835 | 85746 |
| 3        | 76660 | 77769 | 78854 | 79916 | 80952 | 81965 | 82952 | 83914 | 84851 | 85761 |

